UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Matemáticas para Químicos

José Antonio Prado Bassas
José Antonio Prado Tendero
Juan Antonio Rivera Boza.

Dpto. Análisis Matemático
Universidad de Sevilla

P.P.R.
22 de Septiembre de 2008.

Edición: P.P.R.
Año: 2006
I.S.B.N. 84-690-1271-1
U.R.L. https://archive.org/details/matiqui.pdf

Índice

1. Números reales y complejos **5**

1.1. Introducción 5

1.2. El Número Real 6

1.3. Consecuencias de los axiomas 8

1.4. Conjuntos inductivos. Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ 9

1.5. Consecuencias del axioma de supremo 10

1.6. Intervalos. Topología de la recta real 11

1.7. Valor absoluto. Propiedades 12

1.8. Introducción de los números complejos 13

1.9. $\mathbb{C}$ cuerpo no ordenado 13

1.10. Expresión binómica de un número complejo. Operaciones. Complejo conjugado 15

1.11. Módulo y argumento. Forma trigonométrica de un número complejo 15

1.12. Exponencial y logaritmo de un número complejo 17

Ejercicios y Problemas 18

2. Funciones reales. Límites y continuidad **21**

2.1. Definiciones 21

2.2. Funciones elementales 23

2.2.1. Funciones polinómicas 24

2.2.2. Funciones racionales 24

2.2.3. Funciones radicales 24

2.2.4. Función exponencial y función logarítmica 25

2.2.5. Funciones circulares o trigonométricas 25

2.2.6. Funciones circulares inversas 25

2.2.7. Otras funciones 26

2.2.8. Funciones trasladadas 26

2.3. Límite de una función. Propiedades 27
2.3.1. Límites en $x = a$ 27
2.3.2. Límites en el infinito 27
2.3.3. Límites infinitos en el infinito 28
2.3.4. Límites laterales 28
2.4. Continuidad. Discontinuidades 28
2.4.1. Continuidad 28
2.4.2. Discontinuidades 29
2.5. Propiedades de las funciones continuas 30
Ejercicios y Problemas 31

3. Derivadas. Polinomio de Taylor **35**
3.1. Derivada de una función 35
3.2. Álgebra de derivadas 36
3.3. Derivada de la función compuesta y de la función inversa 36
3.4. Funciones con derivada no nula 37
3.5. Teoremas de Rolle y del valor medio 37
3.6. Regla de L'Hôpital 38
3.7. Polinomios de Taylor 39
3.8. Expresiones del término complementario 39
3.9. Aplicación al estudio de extremos relativos 40
3.10. Desarrollo de funciones elementales 41
Ejercicios y Problemas 42

4. Funciones de varias variables reales **47**
4.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ 47
4.2. Funciones de varias variables 50
4.3. Límite de una función 51
4.4. Funciones continuas 53
4.5. Diferenciabilidad 54
4.5.1. Derivadas parciales 54
4.5.2. Derivadas direccionales 55
4.5.3. Diferenciabilidad 56
4.5.4. Regla de la cadena 57
4.6. Derivadas parciales de orden superior 57
4.7. Extremos 58

Ejercicios y Problemas 61

5. Series numéricas y series de potencias **65**

5.1. Sucesiones numéricas 65

5.2. Series: Definiciones y propiedades 66

5.3. Series de términos positivos. Criterios de convergencia 67

5.4. Series alternadas. Teorema de Leibnitz 69

5.5. Serie de potencias. Radio de convergencia 70

5.5.1. Definiciones 70

5.5.2. Continuidad y derivabilidad 71

5.5.3. Desarrollos en serie. Funciones analíticas 71

Ejercicios y Problemas 73

6. Cálculo de primitivas **75**

6.1. Definición y propiedades 75

6.2. Métodos generales de integración 76

6.3. Integración de funciones racionales 76

6.4. Integrales reducibles a racionales 77

Ejercicios y Problemas 79

7. La integral definida **81**

7.1. Integral de Riemann de una función 81

7.2. Funciones integrables 83

7.3. Propiedades de las funciones integrables 84

7.4. Teorema fundamental del Cálculo Integral 85

7.5. Integración por sustitución y por partes 86

7.6. Integrales impropias 87

7.6.1. Integración en intervalos no compactos 87

7.6.2. Criterios de convergencia 89

7.6.3. Convergencia absoluta 90

7.6.4. Las funciones Gamma y Beta 91

7.7. Aplicaciones de la integral 93

7.7.1. Área de figuras planas 93

7.7.2. Longitud de arcos de curva. 94

7.7.3. Volúmenes 95

7.7.4. Área de superficies de revolución 96

7.7.5. Aplicaciones físicas 96
Ejercicios y Problemas 98

8. Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales 105
8.1. Matrices 105
8.2. Matrices cuadradas 107
8.2.1. Propiedades del producto de matrices cuadradas 108
8.2.2. Determinantes, menores complementarios y adjuntos 108
8.2.3. Inversa de una matriz 110
8.3. Sistemas de ecuaciones lineales 111
8.4. Regla de Cramer y Teorema de Rouché-Fröbenius 112
Ejercicios y Problemas 116

9. Espacios Vectoriales 119
9.1. Espacios Numéricos 119
9.2. Subespacios vectoriales 122
9.3. Dependencia lineal 123
9.4. Bases y dimensión 125
Ejercicios y Problemas 129

10. Aplicaciones lineales 131
10.1. Definiciones y propiedades 131
10.2. Representación matricial de una aplicación lineal 134
10.3. El problema de la clasificación lineal. Autovectores y autovalores 135
10.4. Endomorfismos diagonalizables 137
Ejercicios y Problemas 139

Capítulo 1

Números reales y complejos

1.1. Introducción

El Cálculo está basado en el sistema de los números reales y sus propiedades. Los números mas "sencillos" de todos son los **naturales**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ surgen con la necesidad de contar. Si le añadimos sus negativos y el 0 obtenemos los **enteros** $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, pero cuando medimos ciertas magnitudes, los enteros son inadecuados, están muy separados unos de otros. Esto nos lleva a considerar cocientes de enteros. Los números que se pueden escribir de la forma $m/n,\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$, son llamados números **racionales** que los representaremos por $\mathbb{Q}$. Pero los números racionales no sirven para medir todas las longitudes. Alrededor del siglo V a.C., los griegos demostraron que aunque la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 mide $\sqrt{2}$, este número no puede ser representado como cociente de dos naturales, luego no es racional. A estos números se les llamó irracionales y junto con los racionales constituyen el conjunto de los números **reales** $\mathbb{R}$. Como hemos podido comprobar, se verifica: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

El sistema de números reales pueda ampliarse aún más a los números **complejos**. Estos son números de la forma $a + bi$ donde a y b son reales e $i = \sqrt{-1}$.

Los números reales pueden entenderse como etiquetas para puntos a lo largo de una recta. Miden la distancia a un punto previamente fijado O, llamado origen y que se etiqueta con el número 0. Cada punto de la recta tiene un único número real que lo etiqueta, a ese número lo llamaremos coordenada del punto, y a la recta coordenada resultante, **recta real**.

El concepto de número real fue el último, de los que se estudian en un curso de análisis diferencial e integral, en fundamentarse rigurosamente. Probablemente este hecho es debido a que el concepto de número real es el que tiene una significación geométrica más clara como punto de una recta o como longitud de un segmento.

Con la definición rigurosa de los conceptos de límite y de función continua, unido al hecho del descubrimiento de las geometrías no euclídeas, se hizo evidente la necesidad de encontrar una fundamentación aritmética de los números reales que sustituyera a la idea geométrica que hasta bien entrado el siglo XIX se tenía de éstos.

El primer paso fue la fundamentación de los conceptos de número entero y número racional tomando a los naturales como punto de partida (Weierstrass en torno a 1860) que es en resumidas cuenta la que todavía usamos. Parecía lógico pues, definir los reales a partir de los racionales, lo que se realizó vía sucesiones (Cantor) o cortaduras (Dedekind). Así, sobre 1890 ya se tenía una fundamentación rigurosa de los números reales basada en la aritmética. Pero faltaban los cimientos del entramado, los números naturales. Fue Peano en 1889 quien logró dar un sustento lógico a los números naturales (que está en vigor en la actualidad) y que era el eslabón que faltaba para culminar en complejo edificio de los números reales.

Posteriormente algunos autores creyeron conveniente dotar al conjunto de los números reales de su propio sistema de axiomas. En los últimos años del siglo XIX, Hilbert tenía preparado el sistema de axiomas para los números reales que, en esencia, es el que presentamos en la presente obra.

1.2. El Número Real

Definición 1.2.1. *Llamaremos* números reales *a los elementos de un conjunto* $\mathbb{R}$*, dotado de dos operaciones internas* $(+, \cdot)$ *y una relación de orden estricto* $(<)$ *que verifican los siguientes axiomas:*

Axiomas de cuerpo.

1. Conmutatividad : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x,$

   $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x.$

2. Asociatividad : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\quad (x + y) + z = x + (y + z),$

   $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

3. Distributividad : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$.

4. Elementos neutros : $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + 0 = x$,

   $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $1 \cdot x = x$.

5. Elementos simétricos : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$

   $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \; \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : \; x \cdot x^{-1} = 1$.

   Notación: Escribiremos $x - y$ por $x + (-y)$ y también $\dfrac{x}{y}$ por $x \cdot y^{-1}$.

   Axiomas de orden.

6. Tricotomía : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ ó $y < x$ ó $y = x$.

7. Si $x < y$ y $z \in \mathbb{R}$, entonces $x + z < y + z$.

8. Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $x \cdot y > 0$.

9. Si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$.

Para poder expresar el décimo axioma, definiremos previamente los conceptos de *cota superior, supremo y máximo.* Análogamente se definen los conceptos de *cota inferior, ínfimo y mínimo*, dejándose como ejercicio al alumno.

Definición 1.2.2. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *. Si existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leq x$, $\forall a \in A$, *decimos que* A *está acotado superiormente y que* x *es una cota superior de* A*. El supremo de* A *se define como la menor de las cotas superiores, es decir, si* a *es cota superior de* A *entonces* $\sup A \leq a$ *. Si* $\sup A \in A$ *, decimos que es máximo, representándolo como* $\max A$.

Axioma de completitud.

10. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente, tiene supremo.

1.3. Consecuencias de los axiomas

De los axiomas de cuerpo.

Todas estas consecuencias se demuestran a partir de los cinco primeros axiomas, siendo un ejercicio muy útil para el alumno su prueba para familiarizarse con el lenguaje matemático.

1. Unicidad del 0 y 1.
2. Si $x + y = x + z$, entonces $y = z$.
3. Unicidad de los elementos simétricos.
4. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.
5. $-(-x) = x$.
6. $(-1) \cdot x = -x$.
7. $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
8. $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.
9. Si $x \neq 0$ y $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$.
10. Si $x \cdot y = 0$, entonces $x = 0$ ó $y = 0$.

De los axiomas de orden.

1. $x < 0 \iff -x > 0$.
2. Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$,
   si $x > y$ y $z < 0$, entonces $x \cdot z < y \cdot z$.
3. Si $x > y > 0$ y $z > w > 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot w$.
4. Si $x \cdot y > 0$ entonces $x > 0$ e $y > 0$, o bien $x < 0$ e $y < 0$.
5. $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ es $x^2 = x \cdot x > 0$. En particular $1 > 0$.

1.4. Conjuntos inductivos. Los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Aunque es habitual definir los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{N}$ y éste mediante los axiomas de Peano, vamos a ver aquí una sencilla forma de conseguir dichos conjuntos a través del conjunto de axiomas de los números reales como subconjuntos "especiales" de $\mathbb{R}$.

Definición 1.4.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que S es un* conjunto inductivo de $\mathbb{R}$ *si se verifica*

a) $1 \in S$.

b) *Si* $x \in S \Rightarrow x + 1 \in S$.

Definición 1.4.2. *Un número $n \in \mathbb{R}$ se dice que es* natural *si pertenece a todos los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$. Llamaremos $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales.*

Teorema 1.4.3. *$\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo de $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.4.4 (Principio de inducción)**.** *Sea $S \subset \mathbb{N}$. Si S es un conjunto inductivo de $\mathbb{R}$, entonces $S = \mathbb{N}$.*

Teorema 1.4.5 (Principio de buena ordenación)**.** *Si $A \subset \mathbb{N}$ es no vacío, entonces tiene primer elemento, es decir, $\exists a \in A : \forall n \in A \; a \leq n$.*

Definición 1.4.6. *Se definen:*

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$.
Sus elementos se llaman ***números enteros****.*

$\mathbb{Q} = \{p \cdot q^{-1} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$.
Sus elementos se llaman ***números racionales****.*

Proposición 1.4.7. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Definición 1.4.8. *Llamamos* números irracionales *a los elementos de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

1.5. Consecuencias del axioma de supremo

Teorema 1.5.1 (Propiedad fundamental del supremo). *Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cota superior de A. Son equivalentes:*

1) $\alpha = \sup A$.

2) $\forall h > 0,\ \exists a \in A$ tal que $\alpha - h < a < \alpha$.

Análogamente podríamos enunciar la propiedad fundamental del ínfimo.

Teorema 1.5.2 (Propiedad fundamental del ínfimo). *Sea $A \subset \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, y sea $\beta \in \mathbb{R}$ cota inferior de A. Son equivalentes:*

1) $\beta = \text{ínf}\, A$.

2) $\forall h > 0,\ \exists b \in A$ tal que $\beta < b < \beta + h$.

Proposición 1.5.3. *$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Proposición 1.5.4. *$\forall x \in \mathbb{R}$, existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.*

A este número n se le llama *parte entera* de x y se denota por $[x]$.

Teorema 1.5.5 (Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$). *$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.*

Corolario 1.5.6. *$\forall x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $\dfrac{1}{n} < x$.*

Teorema 1.5.7.

- *$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y,$ existe $q \in \mathbb{Q}$ con $x < q < y$.*
- *$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y,$ existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $x < r < y$.*

Por verificarse ese Teorema se dice que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son *densos* en $\mathbb{R}$.

1.6. Intervalos. Topología de la recta real

Definición 1.6.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Llamaremos* intervalos acotados *a los siguientes conjuntos de números reales:*

1. Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
2. Intervalo abierto-cerrado: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
3. Intervalo cerrado-abierto: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
4. Intervalo abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Los intervalos no acotados se definen de la siguiente forma:

1. Intervalo cerrado no acotado superiormente: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
2. Intervalo abierto no acotado superiormente: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.
3. Intervalo cerrado no acotado inferiormente: $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
4. Intervalo abierto no acotado inferiormente: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Definición 1.6.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$.*

- *$a \in A$ es un* ***punto interior*** *de A si*

$$\exists r > 0 : \ (a-r, a+r) \subset A.$$

  El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama ***interior*** *de A y se denota por $\overset{\circ}{A}$.*

- *$a \in \mathbb{R}$ es un* ***punto adherente*** *de A si*

$$\forall r > 0, \ (a-r, a+r) \cap A \neq \emptyset.$$

  El conjunto de todos los puntos adherentes de A se llama ***clausura*** *de A y se denota por $\overline{A}$.*

- *$a \in \mathbb{R}$ es un* ***punto de acumulación*** *de A si*

$$\forall r > 0, \ ((a-r, a+r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

  El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se denota por A'.

- $a \in A$ *es un* ***punto aislado*** *de* A *si* $a \in \overline{A} \setminus A'$.
- $a \in \mathbb{R}$ *es un* ***punto frontera*** *de* A *si* a *es un punto adherente de* A *y de* $\mathbb{R} \setminus A$.
- *Se dice que* A *es un* ***entorno*** *de* a *si* $a \in \overset{\circ}{A}$.
- A *se dice* ***abierto*** *si* $\overset{\circ}{A} = A$.
- A *es* ***cerrado*** *si* $\mathbb{R} \setminus A$ *es abierto.*

1.7. Valor absoluto. Propiedades

Definición 1.7.1. *Para cada número real* x*, se define el valor absoluto de* x *como*

$$| x | = \sup\{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ | x | \geq 0$.
2. $| x | = 0 \iff x = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ -| x | \leq x \leq | x |$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ | x \cdot y | = | x | \cdot | y |$.
5. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Entonces $| x | \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.
6. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Entonces $| x | \geq a$ si y sólo si $x \geq a$ ó $x \leq -a$.
7. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ | x + y | \leq | x | + | y |$ (Desigualdad triangular).
8. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ | | x | - | y | | \leq | x - y |$.

1.8. Introducción de los números complejos

Como sabemos que la ecuación $x^2 - 2 = 0$, no tiene soluciones racionales por ello fue necesario introducir los números reales. Por tanto la siguiente pregunta es, ¿ si $x^2 + 1 = 0$, no tiene soluciones reales (¿por qué?), entonces dicha ecuación es irresoluble ?
Cardano en 1545 se planteó el siguiente problema: dado un segmento de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de forma que el rectángulo que se forma tenga un área de 40 unidades cuadradas. Para resolverlo, Cardano operó formalmente: Sea x la longitud de una división y $10 - x$ el de la otra. Entonces,

$$(10-x)x = 40 \Longrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Longrightarrow x_1 = 5 + \sqrt{-15}\ ,\ x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

Además, formalmente verificó la solución:

$$A = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.\ \text{!!!!}$$

Es decir que la solución venía dada por una raíz de un número negativo. Tales soluciones se las denominaron *imposibles* o *imaginarias*. Fue Euler el primero en introducir la notación $\sqrt{-1} = i$.

1.9. $\mathbb{C}$ cuerpo no ordenado

Definición 1.9.1. *Un número complejo z es un par ordenado de números reales x, y, es decir, $z = (x, y)$, donde x se denomina parte real de z e y se denomina parte imaginaria y se denotan por $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. El conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por $\mathbb{C}$. Para dos números complejos cualesquiera $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, se define la operación suma "+" y producto "·" de la siguiente forma:*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2\ ,\ x_1y_2 + y_1x_2\ )$$

Así $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cumple efectivamente las propiedades de cuerpo conmutativo:

1. Conmutativa : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ ,\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ ,\ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1\ ,$

2. Asociativa : $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,

   $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$,

3. Distributiva : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 + z_3)$,

4. Existencia de elementos neutros : $\exists\ 0 = (0,0) \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $z + 0 = z$,

   $\exists\ 1 = (1,0) \in \mathbb{C}$, $\mid \forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $z \cdot 1 = z$,

5. Existencia de elementos simétricos : $\forall z = (x,y) \in \mathbb{C}$, $\exists -z = (-x,-y) \in \mathbb{C} \mid$ $z + (-z) = 0$

   $\forall\ z = (x,y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0\ \exists z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2} , \dfrac{-y}{x^2+y^2} \right) \in \mathbb{C} \mid z \cdot z^{-1} = 1.$

La prueba de estas propiedades se dejan propuestas al alumno.

Es fácil comprobar que si z_1 y z_2 son números tales que $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) = 0$, las operaciones anteriores coinciden con las de los números reales, de forma que los números reales son un subconjunto de los complejos, concretamente son los números complejos de la forma $x \sim (x,0)$.

Los números complejos de la forma $\mathrm{Re}(z) = 0$ se denominan imaginarios puros.

Utilizando el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ descubrimos que es posible resolver ecuaciones algebraicas que no eran resolubles para los reales, por ejemplo

$$x^2 + 1 = 0, \quad \rightarrow \quad x^2 = -1 \quad \rightarrow \quad x = i = (0,1).$$

Las propiedades de un cuerpo ordenado están expuestas en la definición 1.2. en los axiomas de $\mathbb{R}$. Destacar que $\mathbb{C}$ es un cuerpo no ordenado ya que, por ejemplo, i no cumple el axioma de tricotomía. Es claro que $i \neq 0$. Supongamos que $i > 0$, entonces por el axioma 7. $i \cdot i > 0$, luego $-1 > 0$, o equivalentemente, $0 > 1$, (lo cual pudiera ser cierto en $\mathbb{C}$ pues no hemos decidido todavía que criterio vamos a utilizar para ordenarlos). Ahora bien, si $-1 > 0$, entonces $(-1) \cdot (-1) > 0$, de donde $1 > 0$, lo cual es imposible por el axioma 5.. Un razonamiento análogo demuestra que i no puede ser menor que cero (se propone como ejercicio). Por tanto $\mathbb{C}$ es un cuerpo no ordenado.

1.10. Expresión binómica de un número complejo. Operaciones. Complejo conjugado

La expresión más común para representar un número complejo es la *forma binómica*:

$$z = (x, y) = x(1, 0) + (0, 1)y \sim x + iy$$

donde $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.

Operaciones elementales en forma binómica. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos cualesquiera, entonces

$$z_1 \pm z_2 \;=\; (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) \;=\; x_1x_2+x_1y_2i+y_1x_2i+y_1y_2i^2 \;=\; (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i$$

teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ y agrupando partes reales e imaginarias

$$\frac{z_1}{z_2} \;=\; \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \;=\; \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \;=\; \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \;+\; i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Definición 1.10.1. *Dado un número complejo $z = x + iy$ se llama complejo conjugado de z y se denota por $\overline{z}$, al complejo $\overline{z} = x - iy$.*

Para $\overline{z}$ se cumplen las siguientes propiedades: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$
5. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
6. $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
7. $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$

1.11. Módulo y argumento. Forma trigonométrica de un número complejo

Definición 1.11.1. *Sea $z = x + iy$. Se llama módulo de z al número real positivo $\rho = |z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$ y se llama argumento de z al ángulo $\theta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ tal que*

$$x = \rho\cos(\theta) \qquad y = \rho\mathrm{sen}(\theta)$$

Por tanto

$$z = x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) = \rho_\theta$$

en lo que se denomina forma trigonométrica de z.

Para el módulo y el argumento de z se cumplen las siguientes propiedades: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $\mid z \mid \geq 0$
2. $\mid z \mid = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
3. $\mid z \mid^2 = z \cdot \overline{z}$
4. $\mid z_1 + z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid$
5. $\mid z_1 \cdot z_2 \mid = \mid z_1 \mid \cdot \mid z_2 \mid$

Operaciones elementales en forma trigonométrica.

Observaremos que algunas de las operaciones facilitan mucho su cálculo. El producto, cociente, potencia entera y raíz entera quedan de la siguiente forma:

Sean $z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\text{sen}(\theta_1))$ y $z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2))$ dos números complejos cualesquiera en forma trigonométrica, entonces el producto

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2)(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

el cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

y la potencia y raíz, sea $z = \rho(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$ y $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n\text{veces}} = \rho^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta))$$

en lo que se conoce como la *fórmula de Moivre.*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Nota: Se dejan como ejercicio las deducciones de estas igualdades.

1.12. Exponencial y logaritmo de un número complejo

Definición 1.12.1. *Sea $t \in \mathbb{R}$ se define*

$$e^{it} = \cos t + i\text{sen}t,$$

que se denomina fórmula de Euler. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ρ su módulo y θ cualquier argumento de z se define la exponencial compleja de z como

$$e^z = e^{\text{Re}(z)}(\cos(\text{Im}(z)) + i\text{sen}(\text{Im}(z))$$

Nota: Si z es real, es decir, $\text{Im}(z) = 0$ la fórmula queda como la que conocíamos en $\mathbb{R}$.

Para la exponencial compleja se cumplen las siguientes propiedades: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $e^0 = 1$
2. $e^z \neq 0$
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4. $\mid e^z \mid = e^{\text{Re}(z)}$
5. $e^z = 1 \iff z = 2\pi ki \ \forall k \in \mathbb{Z}$
6. $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2\pi ki \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Definición 1.12.2. *Sea $z \in \mathbb{C}$, ρ su módulo y θ cualquier argumento de z el logaritmo de z es*

$$\log(z) = \log(\rho) + i\theta + 2\pi ki \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Definición 1.12.3. *Sea Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $w \in \mathbb{C}$, entonces*

$$z^w = e^{w\log z}$$

Definición 1.12.4. *Sea $z \in \mathbb{C}$, Se definen las funciones seno y coseno como:*

$$\text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Ejercicios y Problemas

1.- a) Demostrar el siguiente enunciado: Si n es un número natural tal que n^2 es par, entonces n es par.

b) Demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

2.- Demostrar por inducción las fórmulas:

$$a)\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$d)\ n! \geq 2^{n-1} \qquad e)\ \sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a - a^{n+1}}{1-a},\ (a \neq 1) \qquad f)\ 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} = \dot{19}$$

3.- Probar que si la propiedad $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1}$ se verifica pera un cierto valor n, entonces se verifica para $n+1$, pero como se puede comprobar, la propiedad es falsa. ¿Contradice este hecho el principio de inducción?

4.- Decir, razonando la respuesta, si puede ser racional:

a) La suma de un racional y un irracional. b) El opuesto, o el inverso, de un irracional.

c) La suma, o el producto, de dos irracionales. d) El producto de un racional y un irracional.

e) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ con a, b, c, d enteros, $c \neq 0$, y x un irracional.

5.- a) El número $\dfrac{a+b}{2}$ se llama media aritmética de a y b. Demostrar: $a < b \Longrightarrow a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

b) El número $\sqrt{ab}$ se llama media geométrica de los dos números positivos a y b. Demostrar que

$$a < b \Longrightarrow a < \sqrt{ab} < b.$$

c) Para dos números positivos, probar que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

6.- Describir, en cada caso, el conjunto de números reales x que verifican la condición:

a) $|2x+3|<2$ b) $|6x+2|>5$ c) $|x-2|+|x-3|=2$

d) $|2x-1|\leq|x+2|$ e) $\left|5-\dfrac{1}{x}\right|<1$ f) $|x^2-4x+3|+|2x-4|=|x^2-2x-1|$

g) $|x|=x-5$ h) $x^2-2|x|-3=0$ i) $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$

j) $|-5x+1|\leq 1$ k) $|x|=x+5$

7.- De los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, decir cuáles están acotados superiormente e inferiormente y calcular sus supremos e ínfimos, si éstos existen:

$$A=\{x\in\mathbb{R}:0<x<1\},\quad B=\{x\in\mathbb{Q}:0<x<1\},\quad C=\{x\in\mathbb{R}:x^2>4\},$$

$$D=\{x\in\mathbb{R}:3x^2-10x+3<0\},\quad E=\{x\in\mathbb{R}:(x-1)(x-2)(x-3)<0\},$$

$$F=\left\{\frac{2n-1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\},\quad G=\{x\in\mathbb{R}:|x^2-5x+5|<1\},\quad H=\{x\in\mathbb{R}:x^2-x>0\}.$$

8.- Calcular: *a)* $\dfrac{1-i}{5+3i}$, *b)* $(4+3i)^2$, *c)* $(-2+2i)^3$ *d)* $\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-i)^4}$, *e)* $\displaystyle\sum_{k=-3}^{15} i^k$

9.- Calcular $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$ y $\sqrt[4]{4^2}$. ¿Coinciden?

10.- Calcular: *a)* $\sqrt[3]{-2+2i}$ *b)* $\sqrt[6]{-64}$ *c)* $\sqrt[3]{-i}$ *d)* $e^{(2+\frac{\pi}{3}i)}$ *e)* $\log\left(-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+ie^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$.

11.- Sea $z\in\mathbb{C}$ la raíz cuarta de -1 cuyo afijo está en el segundo cuadrante. Hallar:

a) El valor de z. b) e^z. c) $\cos z$. d) $\log z$.

12.- Hallar dos números complejos conjugados tales que su diferencia sea $6i$ y su cociente sea imaginario puro.

13.- Halla los 4 números complejos z que verifican $z=\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$

14.- Hallar los números complejos $z\in\mathbb{C}$ tales que $z^5=\overline{z}$.

15.- Hallar el lugar geométrico de los afijos de los complejos z tales que $\left|\dfrac{z+5}{z-3}\right|=1$.

16.- Resolver las ecuaciones: *a)* $\cos z = 2$ *b)* $\operatorname{sen} z = i$

17.- Describir geométricamente todos los números complejos que verifiquen:

a) $z + \bar{z} = 1, \qquad z - \bar{z} = i, \qquad \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z).$

b) $|z| = 1, \qquad |z + i| \leq 3, \qquad 1 \leq |z - 1| \leq 2.$

c) $|z| > |z + 1|, \qquad z + \bar{z} = |z|^2, \qquad z(\bar{z} + 2) = 3.$

d) $|z + 2i| + |z - 2i| = 6, \qquad \left|\dfrac{z-2}{z+2}\right| = 1, \qquad \arg\left(\dfrac{z-2}{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

18.- Construir un hexágono regular centrado en el origen tal que uno de sus vértices sea el punto $A(1, \sqrt{3})$.

19.- Construir un cuadrado centrado en el origen uno de cuyos vértices sea: a) El punto $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$.

b) El punto $B(4, 3)$.

20.- a) Dados los complejos $z = 2+i$ y $z_1 = 3-i$, encontrar otros tres números complejos z_2, z_3 y z_4 tales que los afijos de z_1, z_2, z_3, z_4 formen un cuadrado de centro el afijo de z.

b) Calcular el área de dicho cuadrado

21.- Dados los complejos $z = -1+i$ y $z_1 = -2+3i$, encontrar otros dos números complejos z_2 y z_3 tales que los afijos de z_1, z_2, z_3 formen un triángulo equilátero de centro el afijo de z.

Capítulo 2

Funciones reales. Límites y continuidad

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. *Una* función real de variable real *es una aplicación que a cada punto x de un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ le hace corresponder un único elemento de $\mathbb{R}$. Habitualmente la denotamos por $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El mayor conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ tal que f esté definida se le llama* dominio *de f. A cada x del dominio le corresponde un valor $f(x) \in \mathbb{R}$ al que llamaremos* imagen *de x según f. Al conjunto de todas las imágenes $f(x)$ con $x \in D$, se le llama* conjunto imagen *y se escribe $f(D)$.*

Dadas las funciones $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, definimos las operaciones suma, producto y cociente del siguiente modo:

Definición 2.1.2.

- $f + g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$
- $f \cdot g : D_f \cap D_g \to \mathbb{R},\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$
- $f/g : D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\} \to \mathbb{R},\ (f/g)(x) = f(x)/g(x).$

Definición 2.1.3.

- *Se dice que una función f es* ***monótona creciente*** *en un subconjunto A de su dominio si* $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- *Se dice que una función f es* ***monótona decreciente*** *en un subconjunto A de su dominio si* $\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *El crecimiento (decrecimiento) se dice que es* ***estricto*** *si se verifica que* $\forall x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 < x_2,\ f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2)$ *resp.*$)$.

Definición 2.1.4.

- *Se dice que una función f está* ***acotada superiormente*** *si existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in D,\ f(x) \leq M$.
- *Se dice que una función f está* ***acotada inferiormente*** *si existe un* $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in D,\ f(x) \geq m$.
- *Se dice que una función f está* ***acotada*** *si lo está superior e inferiormente, es decir, existe un* $K > 0$ *tal que* $\forall x \in D,\ |f(x)| \leq K$.

Definición 2.1.5.

- *Decimos que una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *presenta un* ***máximo relativo*** *en* $a \in D$ *si existe un entorno* $E(a)$ *de* a *tal que* $f(x) \leq f(a),\ \forall x \in E(a)$.
- *Decimos que una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *presenta un* ***mínimo relativo*** *en* $a \in D$ *si existe un entorno* $E(a)$ *de* a *tal que* $f(x) \geq f(a),\ \forall x \in E(a)$.
- *Decimos que* $M \in f(D)$ *es el* ***máximo (absoluto)*** *de* $f : D \to \mathbb{R}$, *si* $M = \max f(D)$.
- *Decimos que* $m \in f(D)$ *es el* ***mínimo (absoluto)*** *de* $f : D \to \mathbb{R}$, *si* $m = \min f(D)$.

Definición 2.1.6.

- *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* ***par*** *si*

$$\forall x \in D,\ -x \in D,\ y\ f(x) = f(-x).$$

- *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* ***impar*** *si*

$$\forall x \in D,\ -x \in D,\ y\ f(x) = -f(-x).$$

- *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* ***periódica*** *si existe un* $h > 0$ *tal que*

$$\forall x \in D,\ x + h \in D,\ y\ f(x) = f(x + h).$$

Al menor número h *que verifica esa condición se le denomina periodo de* f.

Definición 2.1.7 (Composición de funciones)**.** *Sean* $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ *con* $f(D_f) \subseteq D_g$. *Definimos su composición como la función* $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Nota 2.1.8. En general, la composición de funciones no es conmutativa, es más, el hecho de que exista $(g \circ f)(x)$ no implica que exista $(f \circ g)(x)$.

Definición 2.1.9.

- *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* ***inyectiva*** *si se verifica:*

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2,\ \forall x_1, x_2 \in D.$$

- *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* ***sobreyectiva*** *si* $f(D) = \mathbb{R}$.
- *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es* ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 2.1.10. *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva. Llamamos* ***función inversa*** *de* f *y la denotamos por* f^{-1} *a la función*

$$f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R} \text{ tal que } \forall x \in f(D),\ f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

2.2. Funciones elementales

Exponemos en esta sección las principales funciones que el alumno conoce de su etapa educativa anterior, expresando en clase su gráfica y sus propiedades más interesantes.

2.2.1. Funciones polinómicas

Son las funciones que se pueden expresar de la forma

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \quad f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n, \quad a_i\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{N}.$$

- Si $n=0$ tenemos la **función constante** $y=a$, cuya gráfica es una recta paralela al eje de abscisas.
- Si $n=1$ tenemos la **función afín**, $y=mx+n$ cuya gráfica es una recta. A m se le llama **pendiente** de la recta y n es la **ordenada en el origen**. Si m es positivo la recta es creciente y si es negativo es decreciente. Además $m=\tan\alpha$, siendo α el ángulo inclinación de la recta con el eje de abscisas. Si n=0 la función recibe el nombre de **lineal** y pasa por el origen de coordenadas.
- Si $n=2$ tenemos la **función cuadrática** $y=ax^2+bx+c$ su representación gráfica es una parábola de eje vertical, cuyo vértice está en el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y es simétrica respecto la recta $x=\frac{-b}{2a}$.
- Para $n\geq 2$ se obtienen curvas que se estudiarán en el tema de representación gráfica de funciones.

2.2.2. Funciones racionales

Son las funciones dadas por

$$f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \quad f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}, \quad a_i,b_j\in\mathbb{R},\, m,n\in\mathbb{N}.$$

El dominio D está compuesto por todos los números reales a excepción de los que anulan el denominador.

La función racional más conocida es la de proporcionalidad inversa $y=\frac{a}{x}$, cuya gráfica es una hipérbola de asíntotas los ejes coordenados.

2.2.3. Funciones radicales

Son las funciones que se pueden expresar como

$$f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \quad f(x)=\sqrt[n]{x}, \quad n\in\mathbb{N}$$

El dominio D depende del índice de la raíz, $\begin{cases} D=\mathbb{R} & si \quad n\neq\dot{2} \\ D=[0,+\infty) & si \quad n=\dot{2} \end{cases}$

La función radical más conocida es $y = +\sqrt{x}$, que junto con su simétrica $y = -\sqrt{x}$, trazan una gráfica que es una parábola de eje horizontal.

2.2.4. Función exponencial y función logarítmica

La **función exponencial** de base a ($a > 0$) es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

- Si $0 < a < 1$, la función es estrictamente decreciente.
- Si $a = 1$, la función es constante.
- Si $a > 1$ la función es estrictamente creciente.

En cualquier caso, la función exponencial es siempre positiva, $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para $a > 0$, $a \neq 1$, la función inversa de la función exponencial existe y se llama **función logarítmica** de base a y se escribe:

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \ : \ g(x) = \log_a x.$$

Como en el caso de la función exponencial, si $a > 1$, la función es creciente, y si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

2.2.5. Funciones circulares o trigonométricas

Son las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\tan x$.

Las dos primeras son periódicas de periodo 2π, su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen el intervalo $[-1, 1]$.

La función tangente $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es periódica de periodo π y su dominio, al ser cociente de dos funciones, son todos los números reales excepto los valores que anulan al denominador, es decir, $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$.

2.2.6. Funciones circulares inversas

Estas funciones solo tienen sentido si se consideran las funciones trigonométricas en intervalos donde sean monótonas. Así, la función inversa de $\operatorname{sen} x$ es la función

$$f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ : \ f(x) = \operatorname{arc\,sen} x.$$

La función inversa de $\cos x$ es la función

$$f : [-1, 1] \to [0, \pi] : \ f(x) = \arccos x.$$

Por último, la función inversa de la tangente es:

$$f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \ f(x) = \arctan x.$$

2.2.7. Otras funciones

La función **valor absoluto**, está definida por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad f(x) = |x|$$

Son interesantes las composiciones de funciones de la forma $y = |f(x)|$, su gráfica se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ sin más que trasladar, simétricamente, los puntos de ordenada negativa a los correspondientes de ordenada positiva.

La función **parte entera**, $f(x) = E(x)$, asigna a cada número real x el mayor número entero que es mayor o igual que x. Así, $E(3{,}5) = 3$, $E(1) = 1$, $E(-4{,}6) = -5$, $E(\pi) = 3$.

Se define la **parte decimal** de x como $D(x) = x - E(x)$. Es una función periódica de periodo 1.

2.2.8. Funciones trasladadas

Son aquéllas que se pueden dibujar a partir de alguna función elemental conocida.

- Traslación horizontal: $y = f(x) \to y = f(x \pm k)$. La función se trasladará a la izquierda o a la derecha k unidades.
- Traslación vertical: $y = f(x) \to y = f(x) \pm k$. Subiremos o bajaremos la función k unidades.
- Traslación oblicua: $y = f(x) \to y = f(x \pm k) \pm k'$. La función se trasladará a la izquierda o a la derecha k unidades y arriba o abajo k' unidades.
- Dilatación vertical: $y = f(x) \to y = kf(x)$. Se produce un cambio de escala en el eje de ordenadas.

2.3. Límite de una función. Propiedades

Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in S'$. Definimos:

2.3.1. Límites en $x = a$

Definición 2.3.1. *Se dice que l es el* límite *de $f(x)$ cuando x tiende a a y se escribe* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap S \setminus \{a\},\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Esta definición tiene sentido aunque f no esté definida en a.

Definición 2.3.2. *Se dice que $f(x)$* tiende *a $+\infty$ cuando x tiende a a y se escribe* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *si*

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap S \setminus \{a\},\ f(x) > M.$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap S \setminus \{a\},\ f(x) < -M.$$

Cuando no se especifique el signo,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap S \setminus \{a\},\ |f(x)| > M.$$

2.3.2. Límites en el infinito

Definición 2.3.3. *Si S no está acotado superiormente, se dice que $f(x)$* converge *a l cuando x tiende a $+\infty$ ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$) si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 : \forall x \in (N, +\infty) \cap S,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Análogamente, si S no está acotado inferiormente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 : \forall x \in (-\infty, -N) \cap S,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Si S no está acotado,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 : \text{si } |x| > N \text{ y } x \in S,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2.3.3. Límites infinitos en el infinito

Definición 2.3.4. *Decimos que:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists N > 0 : \forall x \in (N, +\infty) \cap S,\ f(x) > M,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists N > 0 : \forall x \in (N, +\infty) \cap S,\ f(x) < -M,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists N > 0 : \forall x \in (-\infty, -N) \cap S,\ f(x) > M,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ si } \forall M > 0,\ \exists N > 0 : \forall x \in (-\infty, -N) \cap S,\ f(x) < -M.$$

Análogamente se definen los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (con valores $+\infty$, $-\infty$, ∞), $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (con valor ∞), $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (con valor ∞).

2.3.4. Límites laterales

Sean $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto tales que $\forall \varepsilon > 0,\ (a, a+\delta) \cap S \neq \emptyset$ (primer caso de la siguiente definición) y $(a-\delta, a) \cap S \neq \emptyset$ (segundo caso).

Definición 2.3.5. *Se dice que l es el límite de $f(x)$ en a* por la derecha *si:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l,\ \text{si } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \cap S,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Análogamente, por la izquierda*:*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l,\ \text{si } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \cap S,\ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Proposición 2.3.6. *Siempre que los siguientes límites tengan sentido, se tiene:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

2.4. Continuidad. Discontinuidades

2.4.1. Continuidad

Definición 2.4.1. *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es* continua *en $a \in S$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap S$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Podemos observar que si $a \in S'$, la condición anterior es equivalente a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Por otro lado, si a es un punto aislado de S, f será continua en a, pues por ser punto aislado, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap S = \{a\}$, por lo que $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap S$.

En lo sucesivo consideraremos que a no es un punto aislado de S.

Definición 2.4.2. *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subset S$. Se dice que f es* continua *en B, si lo es en cada punto de B.*

Teorema 2.4.3. *Sean $f : S_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $S = S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Si f y g son continuas en $a \in S$, también lo son $f + g$ y $f \cdot g$.*

Teorema 2.4.4. *Sea $g : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in S$. Si $g(a) \neq 0$ y g es continua en a, entonces $1/g$ es continua en a.*

Corolario 2.4.5. *Sean las funciones $f : S_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $S = S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$,. Si f y g son continuas en $x = a \in S$, y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.*

Teorema 2.4.6. *Sean las funciones $f : S_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : S_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(S_1) \subseteq S_2$, y sea $a \in S_1$. Si f es continua en a y g lo es en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.*

2.4.2. Discontinuidades

Sean $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in S$.

Definición 2.4.7. *Se dice que f tiene una* discontinuidad *en a si f no es continua en a.*

Clasificamos las discontinuidades del siguiente modo:

1.- **Discontinuidad evitable**, si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es finito, pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, o bien, existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es finito, pero $a \notin S$.

2.- **Discontinuidad de salto infinito**, si $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

3.- **Discontinuidad de salto**, si existen $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$, pero no coinciden.

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ se dice que f es continua por la izquierda de a.

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, que f es continua por la derecha de a.

4.- **Discontinuidad esencial** si no existe alguno de los límites laterales.

2.5. Propiedades de las funciones continuas

Definición 2.5.1. *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $a \in S$.*

- *Se llama* supremo *de f ($\sup_S f$), al supremo de $f(S)$, si existe.*
- *Se llama* ínfimo *de f ($\inf_S f$), al ínfimo de $f(S)$, si existe.*
- *Se dice que $f(a)$ es el* máximo (*resp.* mínimo) *absoluto de f en S si $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) para todo $x \in S$.*

Teorema 2.5.2 (de Bolzano). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Corolario 2.5.3 (Propiedad de Darboux). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Para todo número α con $\inf_{[a,b]} f \leq \alpha \leq \sup_{[a,b]} f$, existe un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \alpha$.*

Teorema 2.5.4 (de Acotación). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$.*

Teorema 2.5.5 (de Weierstrass). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, entonces la función alcanza su máximo y su mínimo.*

Ejercicios y Problemas

1.- Encontrar el dominio de las funciones:

$a)\ f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, $b)\ f(x)=\sqrt{1-x}$, $c)\ f(x)=\log\left(x^2-4\right)$, $d)\ f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{9-x^2}{x+2}}$

$e)\ f(x)=\operatorname{sen}\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f)\ f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(2x-1)}$, $g)\ f(x)=\sqrt{\log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}$

2.- Sean $a,b,x>0$,$a\neq 1$, $b\neq 1$ e $y\in\mathbb{R}$, demostrar:

a) $\log_b x=(\log_b a)(\log_a x)$ b) $\log_b(x^y)=y\log_b x$.

3.- Sean $a,b,x>0$,$a\neq 1$ y $b\neq 1$, demostrar:

a) $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$ b) $1+\log_a b=\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x}$, si $ab\neq 1$, $x\neq 1$.

4.- Demostrar:

a) $\operatorname{sen}(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$

b) $\operatorname{sen}(\pi/3)=\sqrt{3}/2$; $\cos(\pi/3)=1/2$.

5.- a) Demostrar que $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen}x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Demostrar que $\operatorname{sen}(x/2)=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$, $\cos(x/2)=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

c) Demostrar que $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$,

$\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

6.- Basándose en las gráficas de las funciones trigonométricas elementales, construir la gráfica de las siguientes funciones en el intervalo $[-2\pi,2\pi]$:

$$y=\operatorname{sen}(x/2),\quad y=2\cos(3x),\quad y=1+\tan(\pi+x),\quad y=2-3\operatorname{sen}(1+2x)$$

7.- Sean $f,g:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ las funciones $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$; $g(x)=x^2+5x$. Definir $f\circ g$ y $g\circ f$, y encontrar $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ donde existan.

8.- Dadas las funciones:

$$f(x)=2x-\frac{2}{x},\quad g(x)=\begin{cases}1-2x & si \quad x<-1\\ x^2+\sqrt{x} & si \quad -1\le x\le 1\\ 1 & si \quad x>1\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}1+\log(1-x) & si \quad x<0\\ 2x-\sqrt{x} & si \quad x\ge 0\end{cases}$$

a) Obtener el dominio de cada una de ellas.

b) Calcular $g(x)+h(x)$ y $f(x)\circ g(x)$.

9.- Calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{10x+x\sqrt{x}},\qquad b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2},\qquad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3},$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2},\qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1-x}-1},\qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x),$$

$$g)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-2},\quad h)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^{\frac{2}{x}},\quad i)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2},\quad j)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

10.- Hallar las constantes a y b para que se cumpla:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0,\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0.$$

11.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}x+1, & si \quad x\le 1,\\ 3-ax^2, & si \quad x>1\end{cases};\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{x-1};\qquad c)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x-2};$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases}0, & si \quad x\le 0;\\ x, & si \quad 0<x<1;\\ -x^2+4x-2, & si \quad 1\le x<3;\\ 4-x, & si \quad x\ge 3.\end{cases};\qquad i)\ f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x^3-2x^2+x},\ f(0)=0;$$

12.- Sean $f, g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$; definir $f \circ g$ y $g \circ f$, y estudiar la continuidad de $f, g, f \circ g, g \circ f$ en los casos:

a) $f(x) = 1 - x, \quad g(x) = x^2 + 5x$

b) $f(x) = |x|, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x > 0; \\ 0, & si \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x - \frac{1}{2}|, & si \quad 0 \leq x \leq 1; \\ 3, & en \quad otro\ caso \end{cases}$

13.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \alpha & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \log\left(1 + \cos^2(\beta x)\right) & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Hallar α y β para que la función f sea continua $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Encontrar un intervalo $[a, b]$ en el que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a $f(x)$.

14.- Probar que las siguientes ecuaciones tienen, al menos, una raíz real:

a) $x2^x = 1, \qquad$ *b)* $x = \operatorname{sen} x + 1, \qquad$ *c)* $e^x = 2 + x, \qquad$ *d)* $2^{-x} = x.$

Capítulo 3

Derivadas. Polinomio de Taylor

3.1. Derivada de una función

Definición 3.1.1. *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in S \cap S'$. Se dice que f es* ***derivable*** *en $x = a$ si existe y es finito el límite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Al valor de este límite se le llama* ***derivada*** *de f en $x = a$ y se denota por $f'(a)$. Es decir,*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Sea $S_1 = \{x \in S : f \text{ es derivable en } x\}$. Se llama **función derivada** o **derivada primera** de f, denotada por f' a la función $f' : S_1 \to \mathbb{R}$ que asigna a cada $x \in S_1$ la derivada de f en x.

Análogamente, si $S_2 = \{x \in S_1 : f' \text{ es derivable en } x\}$, entonces la función dada por $f'' : S_2 \to \mathbb{R} : x \mapsto f''(x)$ con $f''(x) = (f')'(x)$ se le llama **derivada segunda de f**. Así sucesivamente, si $f^{(n)}(x)$ es la derivada de orden n de f en un punto x, entonces $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$. Si existe $f^{(n)}(x)$ en un punto x, diremos que f es n veces derivable en x. Por coherencia de notación, denotaremos $f^{(0)} = f$.

Definición 3.1.2. *Sea la función $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $a \in S$ tal que $(a, a+\delta) \cap S \neq \emptyset$, $\forall \delta > 0$. Se llama* derivada por la derecha *de a al límite:*

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Análogamente si $(a, a+\delta) \cap S \neq \emptyset$, $\forall \delta > 0$, *se define la* derivada por la izquierda *de a como:*

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+ -} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si existe $f'(a)$, entonces existen $f'_-(a)$ y $f'_+(a)$ y se verifica $f'(a) = f'_-(a) = f'_+(a)$.

Teorema 3.1.3. *Si* $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es derivable en* $a \in S \cap S'$, *entonces* f *es continua en tal punto. El recíproco no es cierto.*

3.2. Álgebra de derivadas

Teorema 3.2.1. *Sean* $f, g : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in S \cap S'$ *y* f, g *derivables en a. Entonces:*

a) $f + g$ *es derivable en a y*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

b) $f \cdot g$ *es derivable en a y*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

c) *Si* $g(a) \neq 0$, f/g *es derivable en a y*

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

3.3. Derivada de la función compuesta y de la función inversa

Teorema 3.3.1 (Regla de la cadena)**.** *Sean* $f : S_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g : S_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *con* $f(S_1) \subseteq S_2$ *y sea* $a \in S_1 \cap S'_1$, *de modo que* f *es derivable en a y* g *es derivable en* $f(a)$. *Entonces* $g \circ f$ *es derivable en a y se verifica*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Teorema 3.3.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona, continua en $[a, b]$ y derivable en $c \in (a, b)$, con $f'(c) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en $f(c)$ y es $(f^{-1})'(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$.*

Apoyándonos en el álgebra de derivadas y en estos dos últimos teoremas, podemos obtener la derivada de todas las funciones elementales.

3.4. Funciones con derivada no nula

Teorema 3.4.1. *Sean $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in S \cap S'$, y f derivable en a.*

a) *Si $f'(a) > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a)$ es $f(x) < f(a)$ y $\forall x \in (a, a + \delta)$ es $f(x) > f(a)$.*

b) *Si $f'(a) < 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in (a - \delta, a)$ es $f(x) > f(a)$ y $\forall x \in (a, a + \delta)$ es $f(x) < f(a)$.*

Notas 3.4.2.

1.- El resultado es válido también si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ (resp. $-\infty$).

2.- El teorema no implica que f sea monótona en un entorno de a, como lo prueba la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) + x/2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Corolario 3.4.3 (Teorema de Fermat). *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \overset{\circ}{S}$ con f derivable en $x = a$. Entonces, si f tiene un extremo relativo en $x = a$ debe ser $f'(a) = 0$.*

Como consecuencia se tiene que los posibles extremos relativos de $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están en $S \setminus \overset{\circ}{S}$, en $\{x \in S :$ f no es derivable en $x\}$ o en $\{x \in S : f'(x) = 0\}$.

3.5. Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema 3.5.1 (de Rolle). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema 3.5.2 (del valor medio generalizado de Cauchy)**.**

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuas en* $[a, b]$ *y derivables en* (a, b)*. Entonces existe un* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Teorema 3.5.3 (del valor medio de Lagrange)**.** *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en* $[a, b]$*, y derivable en* (a, b)*, entonces existe un* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Corolario 3.5.4. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b)*.*

1.- *Si* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*, entonces* f *es constante.*

2.- *Si* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*, entonces* f *es estrictamente creciente en* $[a, b]$*.*

3.- *Si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$*, entonces* f *es estrictamente decreciente en* $[a, b]$*.*

4.- *Si* $|f'(x)| \leq M$ *para todo* $x \in (a, b)$*, entonces* $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$*.*

3.6. Regla de L'Hôpital

Teorema 3.6.1 (Primera regla de L'Hôpital)**.** *Sean* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivables tales que* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ *y* $g(x) \neq 0$*,* $\forall x \in (a, a + \delta)$ *para algún* $\delta > 0$*. Si existe* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, entonces,* $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$*.*

Notas 3.6.2.

1.- El teorema también es válido cuando $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty\,(\pm\infty)$. Resultados análogos se obtienen para $x \to b^-$

2.- Si el límite se tomase en un punto $c \in (a, b)$, realizaríamos el mismo proceso, primero en (a, c) y luego en (c, b).

Teorema 3.6.3 (Segunda regla de L'Hôpital). *Sean $f, g : (m, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y $g(x) \neq 0\ \forall x > K$ para algún $K \geq m$. Si existe $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.*

Nota 3.6.4. El teorema también es válido si se toman límites cuando x tiende a $-\infty$ o si el límite es igual a ∞, $+\infty$ ó $-\infty$.

La regla de L'Hôpital es muy útil para el cálculo de límites. No obstante en clase se darán adecuados ejemplos para verificar que, aunque f y g sean derivables, la existencia de $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *no* implica la existencia de $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3.7. Polinomios de Taylor

Definición 3.7.1. *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n veces derivable en $a \in \overset{\circ}{S}$. Se llama* polinomio de Taylor *de orden n asociado a f en a al polinomio:*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i.$$

Teorema 3.7.2. *En las condiciones y notaciones de la definición anterior, tenemos:*

1) *Las derivadas de orden k $(0 \leq k \leq n)$ de P_n en a coinciden con las de f, y además, P_n es el único polinomio de grado menor o igual que n que lo cumple.*

2) *Si f es un polinomio de grado n, entonces $P_n = f$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Teorema 3.7.3 (de Taylor). *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{S}$, y sea f n veces derivable en a. Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n asociado a f en a, y sea $R_n = f - P_n$. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

3.8. Expresiones del término complementario

Teorema 3.8.1. *Sea $f : (b, c) \to \mathbb{R}$, $n+1$ veces derivable en (b, c) y sea $a \in (b, c)$. Dado $x \in (b, c)$, existen x_1, x_2 entre a y x tales que:*

1) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *(expresión de Lagrange).*

2) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_2)}{n!}(x-x_2)^n(x-a)$ *(expresión de Cauchy).*

3.9. Aplicación al estudio de extremos relativos

Advertimos que hay libros que invierten los conceptos dados a continuación de concavidad y convexidad.

Definición 3.9.1. *Sea $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ derivable en (b,c) y $a \in (b,c)$. Consideremos la función $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, es decir, la recta tangente a f en a.*

- *Se dice que f es* convexa *en a si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (b,c),\ f(x) \geq g(x). \quad (\smile)$$

- *Se dice que f es* cóncava *en a si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (b,c),\ f(x) \leq g(x). \quad (\frown)$$

- *Se dice que f tiene un* punto de inflexión *en a si existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq g(x)$ si x está en $(a-\delta, a) \cap (b,c)$ o bien en $(a, a+\delta) \cap (b,c)$, y $f(x) \geq g(x)$ si x está en el otro. Es decir, si f pasa de cóncava a convexa o viceversa.*

Teorema 3.9.2. *Si $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ es una función n veces derivable en $a \in (b,c)$ tal que $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ con $n \geq 2$. Entonces:*

1) *Si n es par, f es convexa en a si $f^{(n)}(a) > 0$, y f es cóncava en a si $f^{(n)}(a) < 0$.*

2) *Si n es impar, f tiene un punto de inflexión en a.*

Análogamente obtenemos un criterio para máximos y mínimos relativos.

Corolario 3.9.3. *Sea $f : [b,c] \to \mathbb{R}$ n veces derivable en $a \in (b,c)$ tal que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$ con $n \geq 2$. Entonces:*

1) *Si n es par, f tiene un mínimo relativo en a si $f^{(n)}(a) > 0$, y f tiene un máximo relativo en a si $f^{(n)}(a) < 0$.*

2) *Si n es impar, f tiene un punto de inflexión con tangencia horizontal en a.*

Los polinomios de Taylor también tienen una elevada aplicación en el cálculo de límites, lo que se llevará en la práctica a la clase con profusión de ejemplos.

3.10. Desarrollo de funciones elementales

En esta sección nos limitamos a obtener el desarrollo de Taylor de las funciones elementales en el origen. Propondremos al alumno, entre otros, la verificación de los siguientes desarrollos:

- $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n+1)}\dfrac{x^n}{n} + R_n(x), \quad \forall x \in (-1,1].$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x), \quad \forall x \in (-1,1].$

Ejercicios y Problemas

1.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\ f(0)=0; \qquad b)\ f(x)=|x|; \qquad c)\ f(x)=x|x|;$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases} x^2, & si \quad x\leq -1; \\ -2x, & si \quad -1<x<3; \\ -x^2+3, & si \quad x\geq 3. \end{cases} \qquad e)\ f(x)=\begin{cases} x, & si \quad x<0; \\ \log(1+x), & si \quad x\geq 0. \end{cases}$$

2.- Calcular a y b para que $f(x)=\begin{cases} bx^2 & \forall x\geq 1 \\ e^{ax} & \forall x<1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$

3.- Probar que las siguientes ecuaciones tienen, al menos, una raíz real, ¿Es única?:

$$a)\ x2^x=1, \qquad b)\ x=\operatorname{sen}x+1, \qquad c)\ e^x=2+x, \qquad d)\ 2^{-x}=x.$$

4.- Estudia si se aplica el teorema de Rolle a las funciones:

$$a)\ f(x)=x\operatorname{sen}x \text{ en } [\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \qquad b)\ f(x)=\frac{4x^2+4}{x+1} \text{ en } [0,1] \qquad c)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2} \text{ en } [-1,1].$$

5.- Halla $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que la función: $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \forall x<1 \\ \dfrac{c}{x} & \forall x\geq 1 \end{cases}$ verifique las hipótesis del

Teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$ y obtener el valor intermedio correspondiente.

6.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función: $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+2 & si \quad x<0 \\ x^2-3x+2 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Estudiar si se puede aplicar el Teorema de Rolle a la función $f(x)$ anterior en un intervalo $[a,b]$ que contenga a 0. Aplíquese en caso afirmativo.

b) Demostrar que $f(x)=0$ tiene exactamente dos raíces en $[-1,1]$

7.- Sea la función $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x^2 + c}$. Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$. sabiendo que las rectas $x = 2$, $y = 3x + 2$ son asíntotas de la curva $y = f(x)$. Calcular las restantes asíntotas, si las hubiese.

8.- Estudiar el crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de las funciones:

$$a) \quad f(x) = x^6 - x^4, \qquad b) \quad f(x) = xe^x, \qquad c) \quad f(x) = x \log x,$$

$$d) \quad f(x) = 2 + \sqrt[3]{x^2}, \qquad e) \quad f(x) = \log(1 + x^3), \qquad f) \quad f(x) = \left|x^2 - 1\right|.$$

9.- Halla a para que la función $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$, y demuestra que no puede tener un máximo relativo para ningún valor de a.

10.- Sea $f(x) = \log \dfrac{x}{x^2 + c}$, $(c > 0)$. Hallar c para que f tenga un máximo relativo en $x = c$.

11.- Calcula los siguientes límites, estudiando previamente si se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x} - 1}{e^{\tan x} + 1} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\log(1 + x)} \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\log x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{\operatorname{sen}^2(\pi x)} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^3} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \to 0} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{1 - \log x}} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 x)^{\tan^2 x} \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

12.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\quad \forall x \neq 0, \quad f(0) = 0$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

13.- La gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $(1, 1)$ un punto de tangente horizontal que no es extremo relativo, hallar a, b y c.

14.- Dividir un segmento de 60 cm. de longitud en dos partes tales que la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas, sea mínima.

15.- De todos los rectángulos de 12 cm. de perímetro, calcula las dimensiones de aquel que al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área máxima.

16.- En la pared triangular (isósceles) del ático de un chalet, se quiere construir una estantería rectangular, apoyada en el suelo y cuyas esquinas superiores alcancen las paredes inclinadas. Qué dimensiones tendrá la estantería, si se quiere que tenga una superficie mááxima?. Las dimensiones de la pared del ático son 6m. de base y 4m. de altura.

17.- Una ventana está formada por un rectángulo cuyo lado superior se ha sustituido por un triángulo isósceles cuya altura mide los 3/8 de la base. Sabiendo que el perímero de la ventana es de 90 dm, determinar las dimensiones de la ventana para que la cantidad de luz que pueda atravesarla sea máxima

18.- Las cinco caras de un estanque que tiene forma de un prisma recto de base cuadrada totalizan 192 m^2 de área. Calcular sus dimensiones sabiendo que su capacidad es máxima.

19.- Dentro de una esfera maciza de 80 cm. de diámetro, existe una oquedad que tiene forma de cono equilátero inscrito en dicha esfera. Trazar un plano perpendicular al eje del cono de tal manera que la corona circular que dicho plano determina al cortar a la esfera y al cono, tenga área máxima.

20.- ¿A qué altura sobre el centro de una mesa redonda de radio a se debe colocar una bombilla eléctrica para que la iluminación del borde sea máxima?

INDICACIÓN: La iluminación en un punto P se expresa por la fórmula $I = K\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{r^2}$, donde α es el ángulo de inclinación de los rayos respecto de la superficie iluminada, r es la distancia desde el foco luminoso hasta P y la constante K es la intensidad del foco luminoso.

21.- a) Desarrollo de Taylor de orden 3 de $e^x \operatorname{sen} x \quad$ en $x_0 = 0$

b) Usando el apartado anterior, calcular: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x(x+1)}{x^3}$

22.- a) Desarrollo de Taylor de orden 2 en el origen de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

b) Deducir $\dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{x} < 1 + x + 2x^2$, si $x \in (0,1)$

23.- Sea $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-e}e^x$

a) Determinar los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

b) ¿Qué es mayor e^π o π^e ?

24.- Representar las siguientes funciones:

$a)\ y = \dfrac{x}{1+x^2}$; $b)\ y = xe^{\frac{1}{x}}$; $c)\ y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; $d)\ y = \dfrac{2}{1+e^{-2x}}$; $e)\ y = \dfrac{\log x}{x}$;

$f)\ y = 2x + 3x^{\frac{2}{3}}$; $g)\ y = \dfrac{(x^2-5)\cdot e^{-x}}{1-x}$; $h)\ y = \log\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$; $i)\ y = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$.

25.- Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Hallar a y b sabiendo que $f(x)$ es continua y que tiene un extremo relativo en $x = 2$.

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$.

c) Hallar los restantes extremos relativos. ¿Tiene extremos absolutos?

26.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} \log(1+x^2) - 1 & si \quad x \ge 0 \\ ax^2 + b & si \quad x < 0. \end{cases}$ Se pide:

a) Hallar a y b para que f sea continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y absolutos y puntos de inflexión de f.

Capítulo 4

Funciones de varias variables reales

4.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Se trata de dar un resumen acerca de $\mathbb{R}^n$, de su estructura de espacio vectorial euclídeo, con el producto escalar usual, destacando de entre ello, lo relativo a la distancia que se obtiene del referido producto escalar.

Definición 4.1.1. *Designamos por* $\mathbb{R}^n$ *el conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

A sus elementos los llamaremos puntos *o* vectores *de* $\mathbb{R}^n$.

Dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son iguales si y sólo si $x_i = y_i,\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, al número x_i se le llama coordenada i-ésima de $\mathbf{x}$. Asimismo, a la aplicación

$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \longmapsto p_i(\mathbf{x}) = x_i$$

se le llama proyección i-ésima.

Definición 4.1.2. *En $\mathbb{R}^n$ definimos las operaciones:*

- *Suma:* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.
- *Producto por un escalar: Si* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Definición 4.1.3. *Se define el* ***producto escalar*** *entre vectores de $\mathbb{R}^n$ como la aplicación:*

$$(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} :$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Propiedades 4.1.4. *$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se verifica:*

a)
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.
- $\mathbf{x} \cdot (\alpha \mathbf{y}) = (\alpha \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

b) $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$.

c)
- $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \geq 0$
- $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

d) (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})$.

Definición 4.1.5. *Llamamos* ***espacio euclídeo*** *$\mathbb{R}^n$ al espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot\mathbb{R})$ dotado del producto escalar $(\cdot)$.*

Definición 4.1.6. *Definimos la* ***norma euclídea*** *en $\mathbb{R}^n$ como la aplicación*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Propiedades 4.1.7. *$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:*

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.

b) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

c) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$.

d) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

A partir de esta norma podemos definir la distancia euclídea.

Definición 4.1.8. *Se llama* ***distancia euclídea*** *a la aplicación:*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty),\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_n-x_n)^2}.$$

Propiedades 4.1.9. $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}$ *se verifica:*

a) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

b) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

c) Propiedad triangular*:* $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$.

Definición 4.1.10.

- *Se llama* ***bola abierta*** *(o simplemente bola) de centro* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *y radio* $r > 0$*, al conjunto*

$$B(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, d(\mathbf{a},\mathbf{x}) < r\}.$$

- *Se llama* ***bola cerrada*** *de centro* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *y radio* $r > 0$*, al conjunto*

$$\overline{B}(\mathbf{a},r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, d(\mathbf{a},\mathbf{x}) \leq r\}.$$

- *Se llama* ***bola reducida*** *de centro* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *y radio* $r > 0$*, al conjunto*

$$B^*(\mathbf{a},r) = B(\mathbf{a},r) \setminus \{\mathbf{a}\}.$$

- *Se llama* ***entorno*** *de un punto* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *a todo conjunto que contenga alguna bola abierta de centro a.*

4.2. Funciones de varias variables

Las funciones que van a ser objeto de estudio son las de la familia $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ con $D \subset \mathbb{R}^n$, es decir las aplicaciones

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m.$$

Como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se dice que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es una función de n variables.

Ahora nos fijaremos en la función real de dos variables, es decir, el caso $m = 1$, $n = 2$. A este tipo de funciones las llamaremos funciones reales de dos variables.

El conjunto D es el **dominio** de la función. Si éste no se especifica, consideraremos D como el dominio natural, es decir, como el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano para los que la regla de la función tiene sentido y proporciona un valor numérico real. El **rango** de una función es su conjunto de valores. Si $z = f(x, y)$, decimos que x e y son las **variables independientes**, mientras que z es la **variable dependiente**.

Todo lo dicho se extiende normalmente a funciones reales de tres o más variables. Las usaremos a veces, sobre todo las de tres variables.

Por la gráfica de una función f de dos variables entenderemos la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$. Esta gráfica será por lo general una superficie y, como a cada punto (x, y) le corresponde únicamente un valor z, cada recta perpendicular al plano XY corta a la superficie a lo más,en un punto.

Bosquejar la superficie correspondiente a una función $z = f(x, y)$ es con frecuencia una tarea difícil. Un procedimiento que puede servir de ayuda es el utilizado por los fabricantes de mapas, el mapa de contornos. Cada plano horizontal $z = c$ corta a la superficie en una curva. La proyección de esta curva sobre el plano XY es una **curva de nivel**, y una colección de tales curvas es una **gráfica de contorno** o **mapa de contorno**. Las curvas de contorno se utilizan en meteorología, si pensamos que $T(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y), las curvas de nivel de la función son las curvas que unen los puntos de igual temperatura, y reciben el nombre de **curvas isotermas**.

4.3. Límite de una función

Recordemos previamente la definición de límite de una función real de variable real, y ponemos de manifiesto que formalmente son iguales, de hecho, intuitivamente se trata de ver que los valores de la función están cerca de l cuando $\mathbf{x}$ está próximo a $\mathbf{a}$.

En lo sucesivo, por $\mathbf{x}$ notaremos el punto (x, y) y por $\mathbf{a}$, el punto (a, b).

Definición 4.3.1. *Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ un punto de D. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el* límite *de f en el punto $\mathbf{a}$ si se verifica:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que: } (\mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{a}\},\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta) \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon.$$

La condición anterior se puede expresar, recurriendo a las bolas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$, diciendo:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que: si } \mathbf{x} \in B^*(\mathbf{a}, \delta) \cap D \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in B(l, \varepsilon).$$

Vemos ahora la definición de límite infinito

Definición 4.3.2. *Sea $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ un punto de D. Se dice que f tiene límite infinito en $\mathbf{a}$, si para cada $K > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in B^*(\mathbf{a}, \delta) \cap D$, se verifica $|f(\mathbf{x})| > K$. Cuando así ocurre, se escribe:*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty.$$

Definición 4.3.3 (Límites direccionales). *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ un punto de D. Si r es una recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por el punto $\mathbf{a}$, consideremos la restricción de f a r, es decir, la función $f_r : D \cap r \to \mathbb{R}$ definida por $f_r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D \cap r$, y supongamos que $\mathbf{a}$ es un punto de $C \cap r$. Se dice que f tiene límite l en $\mathbf{a}$ según la dirección r, si f_r tiene límite l en $\mathbf{a}$.*

Nota 4.3.4. Es evidente que si f tiene límite l en $\mathbf{a}$, entonces f tiene límite l en $\mathbf{a}$ según toda recta r que pase por $\mathbf{a}$, sin embargo, no es suficiente que f tenga límite l en $\mathbf{a}$ en todas direcciones para poder garantizar que f tenga límite l en $\mathbf{a}$; lo que sólo se

puede asegurar, con carácter general, es que si f tuviera límite en $\mathbf{a}$, dicho límite sería l. Señalemos también que si no existiera el límite de f en $\mathbf{a}$ según una cierta recta r, entonces f no tendría límite en $\mathbf{a}$; a esta misma conclusión llegaríamos en el caso de que f tuviera en $\mathbf{a}$ límites direccionales distintos según dos rectas diferentes. Esto puede extenderse a otros tipos de conjuntos r, no necesariamente rectas.

Definición 4.3.5 (Límites reiterados). *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un punto de D. Las expresiones*

$$l_1 = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right), \quad l_2 = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} \mathbf{f}(x,y)\right)$$

significan:

a) *Para cada valor "y" de un cierto entorno reducido de b, se considera la función $x \mapsto f(x,y)$.*

b) *Se supone que esta función tiene límite cuando $x \to a$, al que llamaremos (por depender de y), $\varphi(y) = \lim_{x\to a} f(x,y)$.*

c) *La función $y \mapsto \varphi(y)$ tiene límite l_1 cuando $y \to b$. En tal caso, a l_1 se le llama **límite reiterado** de f cuando x tiende primero a a e y tiende, después, al punto b. Análogamente con l_2.*

Teorema 4.3.6. *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en $C \subset \mathbb{R}^2$, y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ un punto de D. Si existe y vale l el límite de f en (a,b), y si, para cada "y" de un entorno reducido de b, existe el límite de la función $x \longmapsto f(x,y)$, cuando $x \to a$, entonces existe y vale l el límite reiterado*

$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right).$$

Para el otro límite reiterado se verifica un teorema análogo.

Notas 4.3.7.

- Puede ocurrir:

  1) La función tiene límite en un punto, pero no existe, en dicho punto, ninguno de los límites reiterados (o uno de ellos).

2) La función tiene en un punto sus dos límites reiterados y son iguales, pero no existe su límite en el punto.

3) La función tiene, en un punto, sus dos límites reiterados y son distintos.

- En ocasiones, el anterior teorema permitirá asegurar que una función no tiene límite en un punto.

4.4. Funciones continuas

Definición 4.4.1. *Sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función definida en un conjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$*, y sea* $\mathbf{a} \in D$*. Se dice que* f *es* continua *en* $\mathbf{a}$ *si se verifica :* $\forall \varepsilon > 0$*, existe un* $\delta > 0$ *tal que:*

$$[\mathbf{x} \in D,\ \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta] \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Notas 4.4.2.

- Si $\mathbf{a}$ es un punto no aislado de D, la función es continua en $\mathbf{a}$, si y sólo si f tiene límite en $\mathbf{a}$ y dicho limite es $f(\mathbf{a})$.

- Si $\mathbf{a}$ es un punto aislado de D, la condición de continuidad se cumple trivialmente, por lo que toda función es continua en los puntos aislados de su dominio.

Definición 4.4.3. *Se dice que* f *es* continua *en un conjunto* $C \subset D$*, si es continua en todo punto de* C*.*

Definición 4.4.4. *Si la función* f *no es continua en un punto* $\mathbf{a}$ *de* D*, se dice que* f *es* discontinua *en* $\mathbf{a}$*. En tal caso la discontinuidad será* evitable *o* esencial *según exista o no el límite de* f *en* $\mathbf{a}$*.*

Estudiamos a continuación el álgebra de funciones continuas, propiedades que son consecuencia de las propiedades análogas de los límites, y la continuidad de la función compuesta de dos funciones continuas.

Proposición 4.4.5. *Si f, g son dos funciones reales definidas en un mismo conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, que son continuas en un punto $\mathbf{a} \in D$, entonces también son continuas en $\mathbf{a}$ su suma $f+g$, su producto $f \cdot g$ y su cociente f/g (siempre que $g(\mathbf{a}) \neq 0$).*

4.5. Diferenciabilidad

Cuando se estudian las derivadas de una función $x \longmapsto \varphi(\mathbf{x})$ de una sola variable real, se ve que la derivada $\varphi'(a)$ es el límite, si existe y es finito:

$$\varphi'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}. \tag{1}$$

Pero nosotros, ahora, vamos a considerar una función de varias variables $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = (x, y)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ (las variables son x, y), y un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. En este caso, no podemos proceder como antes por motivos evidentes (tendríamos que dividir por un vector). No obstante, podemos limitar la variación de $\mathbf{x}$ a una recta que pase por $\mathbf{a}$, lo que conduce a las llamadas derivadas parciales que dependen de la dirección con que nos acerquemos al punto $\mathbf{a}$. Si $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{a}$ siguiendo la dirección de un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{1}$, esto es, si se toma $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, y se hace que $\lambda \to 0$, la definición (1) nos conduce de modo natural a la siguiente definición de derivada direccional (de f en $\mathbf{a}$) respecto del vector $\mathbf{u}$:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{\lambda}. \tag{2}$$

De ahí que se den las siguientes definiciones de derivadas parciales de una función de varias variables.

4.5.1. Derivadas parciales

Definición 4.5.1. *Sea $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} = (a, b) \in S$.*

Se llama derivada parcial primera de f respecto de la variable x en el punto $\mathbf{a} = (a, b)$ y se denota por $f'_x(\mathbf{a})$, $[D_1 f](\mathbf{a})$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x}$ al límite (si existe y es finito)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

Se llama derivada parcial primera de f respecto de la variable y en el punto $\mathbf{a} = (a, b)$

y se denota por $f'_y(\mathbf{a})$, $[D_2 f](\mathbf{a})$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial y}$ *al límite (si existe y es finito)*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Definición 4.5.2. *Si la función* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales en todos los puntos del abierto* S*, se llama* ***función derivada (parcial)*** *de* f *respecto de* x *(respecto de* y*) a la aplicación* f'_x, $D_1[f]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, *de* S *en* $\mathbb{R}$, $(f'_y$, $D_2[f]$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, *de* S *en* $\mathbb{R})$ *definida por:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}. \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

En la práctica, para calcular la derivada parcial respecto de x de una función $f(x,y)$, consideraremos que la variable y es constante y se procede como en el caso de una variable. Para derivar parcialmente respecto de y, se procede de igual forma considerando constante la variable x.

Definición 4.5.3. *Sea la función* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. Si existen las derivadas parciales de* f *en un punto* $(a,b) \in S$*, se llama* ***vector gradiente de*** f ***en*** (a,b) *al vector:*

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$

La existencia de derivadas parciales en un punto, no garantiza la continuidad de la función en dicho punto, como se puede comprobar con la función:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},\ \forall (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0,$$

que no es continua en el origen y sin embargo, $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

4.5.2. Derivadas direccionales

Definición 4.5.4. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función definida en un abierto* $S \subset \mathbb{R}^2$*. Consideremos un punto* $(a,b) \in S$ *y un vector unitario* $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$*. Se llama* ***derivada direccional*** *de* f *en el punto* (a,b) *y en la dirección del vector* $\mathbf{u}$ *y se denota por* $f'_{\mathbf{u}}(a,b)$, $[D_{\mathbf{u}} f](a,b)$, $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial \mathbf{u}}$ *al límite (si existe y es finito)*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\cos\alpha, b+h\operatorname{sen}\alpha) - f(a,b)}{h}$$

Es claro que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b)$, con $\mathbf{u} = (1,0)$
y que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a,b)$, con $\mathbf{v} = (0,1)$.

La existencia de todas las derivadas direccionales de una función en un punto tampoco garantiza la continuidad de la función en dicho punto, com se puede comprobar con:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4},\ \forall (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0.$$

4.5.3. Diferenciabilidad

Definición 4.5.5. *Sea $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in S$. Se dice que f es **diferenciable** en (a,b) cuando existen y son finitas las derivadas parciales de f en (a,b) y se verifica:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f[(a,b)+(x,y)] - f(a,b) - \nabla f(a,b)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Si la función $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todos los puntos de S, se dice entonces que f es diferenciable en S y a la aplicación df definida (en S) mediante

$$df\ :\ (x,y) \longmapsto df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

se le llama diferencial de la función f.

Veamos, a continuación unas propiedades de las funciones diferenciables

Proposición 4.5.6.

1. *Si f es diferenciable en (a,b), entonces f es continua en (a,b). El recíproco, en general, no es cierto.*

2. *Si f es diferenciable en (a,b) y $\mathbf{u}$ es un vector unitario de $\mathbb{R}^2$, entonces existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b)$ y se verifica:*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b) = \nabla f(a,b)\cdot \mathbf{u}.$$

3 *Si existen y son continuas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en (a,b), entonces f es diferenciable en (a,b). El recíproco, generalmente, es falso, como lo prueba la función:*

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} + y^2 \operatorname{sen}\frac{1}{y}, (x \neq 0,\ y \neq 0),\ f(x,0) = f(0,y) = 0.$$

Si f es diferenciable en (a,b) y $f(a,b)=c$, el plano de ecuación:

$$z-c=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Se llama plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ en el punto (a,b,c).

4.5.4. Regla de la cadena

a) Una variable independiente.

Sea $z=f(x,y)$ una función diferenciable y supongamos que x,y son funciones diferenciables de una única variable t. En este caso, existe la diferencial $\dfrac{dz}{dt}$ y viene dada por:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

b) Dos variables independientes

Sea $z=f(x,y)$ una función diferenciable y supongamos que x,y son funciones diferenciables de u y v, es decir, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Entonces, z es función de u y v, $z=f(x(u,v),y(u,v))$ y existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ que vienen dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

4.6. Derivadas parciales de orden superior

Al igual que sucede con las funciones de una variable, es posible hallar derivadas parciales de una función de varias variables y de órdenes superiores a uno.

En concreto, para una función $f(x,y)$ hay cuatro posibilidades de obtener la derivada parcial segunda:

a) Dos veces respecto de x: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=D_{11}f.$

b) Dos veces respecto de y: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=D_{22}f.$

c) Respecto de x y respecto de y: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} = D_{12}f.$

d) Respecto de y y respecto de x: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} = D_{21}f.$

4.7. Extremos

Definición 4.7.1. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y* $(a,b) \in S$.

- *Si* $f(a,b) \leq f(x,y)$, $\forall (x,y) \in S$, *entonces* $f(a,b)$ *es el* ***mínimo absoluto*** *de la función* f *en* S.
- *Si* $f(c,d) \geq f(x,y)$, $\forall (x,y) \in S$, *entonces* $f(c,d)$ *es el* ***máximo absoluto*** *de la función* f *en* S.

Proposición 4.7.2. *Si* $f(x,y)$ *es continua en una región cerrada y acotada* $D \subset \mathbb{R}^2$, *entonces existen* (a,b), $(c,d) \in D$ *tales que* $f(a,b)$ *es el mínimo absoluto de* f *en* D, *y* $f(c,d)$ *es el máximo absoluto de* f *en* D.

Definición 4.7.3. *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in D$ *y* $C_{(a,b)}$ *un disco abierto que contiene a* (a,b).

- $f(a,b)$ *es un mínimo relativo de* f *si* $f(a,b) \leq f(x,y)$, $\forall (x,y) \in C_{(a,b)}$.
- $f(a,b)$ *es un máximo relativo de* f *si* $f(a,b) \geq f(x,y)$, $\forall (x,y) \in C_{(a,b)}$.

Definición 4.7.4. *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *y* $(a,b) \in D$ *Se dice que* (a,b) *es un* ***punto crítico*** *de* f *si se verifica que* $\nabla f(a,b) = (0,0)$ *o bien que no existan alguna de las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Definición 4.7.5. *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función dos veces derivable. Se define el Hessiano de* f *en un punto* (x,y) *como el determinante:*

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Teorema 4.7.6 (Condición suficiente de extremo). *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el punto crítico $(a, b) \in D$ con derivadas de segundo orden continuas en una región abierta S tal que $(a, b) \in S$ Se verifica:*

- *Si $H(a, b) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.*
- *Si $H(a, b) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.*
- *Si $H(a, b) < 0$, $f(a, b)$ es un punto de silla.*

Nota 4.7.7 (Multiplicadores de Lagrange). *Para hallar los máximos y mínimos de una función $z = f(x, y, \cdots)$ de $m + n$ variables ligadas por las n ecuaciones*

$$F_1(x, y, \cdots),\ F_2(x, y, \cdots),\ \cdots,\ F_n(x, y, \cdots),$$

buscamos el máximo y el mínimo de la función

$$w(x, y, \cdots) = f(x, y, \cdots) - \lambda_1 F_1(x, y, \cdots) - \lambda_2 F_2(x, y, \cdots) - \cdots - \lambda_n F_n(x, y, \cdots)$$

considerando todas las variables independientes y las λ_i constantes.

Ejemplo 4.7.8.

La función $T(x, y, z)$ representa la temperatura en cada punto de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 11$. Si $T(x, y, z) = 20+2x+2y+z^2$, hallar las temperaturas extremas sobre la curva intersección de la esfera con el plano $x + y + z = 3$

SOLUCIÓN

Función: $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$. $\begin{cases} Ligadura1: & x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0 \\ Ligadura2: & x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$

$$f(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 11) - \mu(x + y + z - 3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2\lambda x - \mu = 0 \quad ; \quad \mu = 2 - 2\lambda x \quad [1]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 - 2\lambda y - \mu = 0 \quad ; \quad \mu = 2 - 2\lambda y \quad [2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2\lambda z - \mu = 0 \quad ; \quad \mu = 2z - 2\lambda z \quad [3]$$

de [1] y [2] se obtiene: $2 - 2\lambda x = 2 - 2\lambda y;\ \lambda x = \lambda y;\ \lambda = 0$, ó $x = y$

a) $\lambda = 0$

Si $\lambda = 0;\ \mu = 2;\ 2 = 2z;\ \mathbf{z = 1}$. Yendo a las ligaduras con $z = 1$:
$x^2 + y^2 + 1 = 11;\ x^2 + y^2 = 10,;\ x^2 + (2 - x)^2 = 10;\ x^-2x - 3 = 0,\ \mathbf{x = 3},\ \mathbf{x = -1}$
$x + y + 1 = 3;\ x + y = 2;\ y = 2 - x$

Si $x = 3$, entonces $y = 2 - 3 = -1$, luego un punto crítico es $P_1(3, -1, 1)$
Si $x = -1$, entonces $y = 2 + 1 = 3$, luego también es punto crítico $P_2(-1, 3, 1)$

b) $x = y$

Si $x = y;\ 2x^2 + z^2 = 11;\ 2x^2 + (3 - 2x)^2 = 11;\ 3x^2 - 6x - 1 = 0;\ x = y = 1 \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
$2x + z = 3;\ z = 3 - 2x$
$z = 3 - 2 \mp \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 1 \mp 4\sqrt{3},$

luego $P_3\left(1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; $P_4\left(1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

En estos cálculos hemos utilizado la condición [1]=[2]. Si utilizásemos las condiciones [2]=[3], ó [1]=[3], obtendríamos los mismos resultados anteriores, por lo que P_1, P_2, P_3, y P_4 son los únicos puntos críticos.

Como $T(P_1) = T(P_2) = 25$ y $T(P_3) = T(P_4) = \dfrac{91}{3}$, la temperatura máxima es de $\dfrac{91}{3}$ grados y la mínima es 25 grados.

Ejercicios y Problemas

1.- Calcula las derivadas parciales de las funciones:

$a)\quad f(x,y)=x^2+y^2\cos(xy) \qquad b)\quad f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad c)\quad f(x,y)=\log\dfrac{x+y}{x-y}$

$d)\quad f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{x-y} \qquad e)\quad f(x,y)=\cos(3x)\,\mathrm{sen}(3y) \qquad f)\quad f(x,y)=\cos(x^2+y^2).$

2.- Comprobar que cada una de las funciones siguientes verifica la ecuación indicada:

$$f(x,y)=e^{xy}+\mathrm{sen}\,(x+y) \qquad xD_1f(x,y)-yD_2f(x,y)=(x-y)\cos(x+y)$$

$$g(x,y,z)=\cos\left(\frac{x+y}{2z}\right) \qquad xD_1g(x,y,z)+yD_2g(x,y,z)+zD_3g(x,y,z)=0.$$

3.- Hallar la derivada de la función $f(x,y)=x^2-y^2$ en el punto $(1,1)$ según la dirección que forma un ángulo de $60°$ con el semieje OX positivo.

4.- Hallar la derivada de la función $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ en el punto $(1,1)$ según la dirección que forma un ángulo α con el semieje OX positivo. ¿En qué dirección es máxima?. ¿Y mínima?. ¿Y nula?

5.- Hallar el gradiente de la función $f(x,y,z)=x^3-y^3-3xy(x-y)+e^z$ en el punto $(0,0,0)$.

6.- La temperatura en cada punto (x,y) de una placa circular delgada de radio 10 centímetros viene dada por $T(x,y)=100-(x^2+y^2)$. Se sabe que en el punto (4,3) la temperatura es de 75^o. a) Encontrar un valor aproximado de la temperatura en el punto $(4'01,2'98)$. b) Encontrar la dirección en la que la velocidad de variación de la temperatura en el punto (4,3) sea lo más grande posible. c) ¿Cuánto vale dicha velocidad?

7.- La cantidad de calor Q desprendida cuando x moléculas de SO_4H_2 se mezclan con y moléculas de H_2O es $Q=\dfrac{ay}{bx+y}$ (a,b constantes positivas). Hallar el incremento de calor por molécula de agua añadida si la cantidad de ácido es constante. b) Idem por molécula de ácido añadida si la cantidad de agua es constante. c) Si en un momento

dado el número de moléculas de ácido es diez veces mayor que el de agua, hallar la variación de calor si x aumenta en un 5 por 100, e y aumenta en un 10 por 100.

8.- Demostrar que una función de la forma $f(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$, donde f_1 y f_2 son derivables dos veces y a es una constante, es solución de la ecuación unidimensional de ondas, $D_{22}f(x,t) = a^2 D_{11}f(x,t)$.

9.- Demostrar que la función $f(x,y) = a\log(x^2+y^2)+b$ cumple la ecuación de Laplace, es decir,

$$\Delta f = D_{11}f(x,y) + D_{22}f(x,y) = 0.$$

10.- Dada la función $f(x,y) = \cos(xy)$, hallar $\dfrac{df}{dt}$ cuando se realiza el cambio de variables $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$. Comprobarlo hallando la expresión de f en términos de t.

11.- Idem si $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ y el cambio es $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$.

12.- Idem si es $f(x,y,z) = x^2 + xyz$, y el cambio $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, y $z = t^2$.

13.- Idem si es $f(x,y) = \log x + x^2 \operatorname{arc\,cos} y$, y el cambio $x = e^t$, $y = \cos t$.

14.- Dada la función $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)/x}$, hallar las derivadas parciales respecto de r y t cuando hacemos el cambio de variables a coordenadas polares, es decir, $x = r\cos t, \quad y = r\operatorname{sen} t$.

15.- Dada la función $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$, hallar las derivadas parciales respecto de u y v al hacer el cambio de variables $x = v\cos u$, $y = v$.

16.- Dada la función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, hallar las derivadas parciales respecto de las variables r, s y t al hacer el cambio a coordenadas esféricas, $x = r\cos s\cos t$, $y = r\operatorname{sen} s\cos t$ y $z = r\operatorname{sen} t$.

17.- Transformar la ecuación $D_1 f(x,y) = D_2 f(x,y)$ cuando se realiza el cambio de variables dado por:

$$x = (u+v)/2, \quad y = (u-v)/2.$$

18.- Repetir el problema anterior si ahora la ecuación es $xD_2f(x,y) = yD_1f(x,y)$ y hacemos el cambio a coordenadas polares.

19.- Calcula los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x,y) = x^4+x^2y+y^2$, *b)* $f(x,y) = x^4+y^4-4a^2xy+8a^4$ *c)* $f(x,y) = xye^{x+2y}$

20.- Calcula los extremos de $f(x,y) = e^x + e^y$ sujetos a $x + y = 2$.

21.- Halla los extremos de $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ sobre la circunferencia unidad.

22.- Halla las distancias máxima y mínima del origen a la elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

23.- Halla los extremos de la función $f(x,y,z) = x + y + z$ sobre el elipsoide de ecuación $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

24.- Consideremos la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + bxy + az$, donde a y b son parámetros reales. Halla la relación entre las constantes a y b para que el punto $(1,1,1)$ sea extremo de f sobre la esfera de centro el origen y radio $\sqrt{3}$.

25.- Sea la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, se pide:

a) Dominio de la función.

b) Calcular $\vec{\nabla} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) Derivada direccional en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ según la dirección que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad. con el semieje OX positivo.

Capítulo 5

Series numéricas y series de potencias

5.1. Sucesiones numéricas

Definición 5.1.1. *Una sucesión de números reales es una aplicación*

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,:\, n \mapsto \varphi(n) = a_n.$$

Habitualmente se llama sucesión a la imagen de la aplicación y la representaremos por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión, y $l \in \mathbb{R}$.

Definición 5.1.2.

- *Se dice que* $\{a_n\}$ converge *a* l*, y se denota por* $\lim a_n = l$*, si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0,\ |a_n - l| < \varepsilon$.
- *Se dice que* $\{a_n\}$ diverge *a* $+\infty$ *(resp. a* $-\infty$*), lo que se denota por* $\lim a_n = +\infty$ *(resp.* $\lim a_n = -\infty$*), si para todo* $M > 0$*, existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0,\ a_n > M$ *(resp.* $a_n < -M$*).*
- *Se dice que* $\{a_n\}$ diverge *a* ∞ $(\lim a_n = \infty)$ *si para cada* $M > 0$ *existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0,\ |a_n| > M$.

- *Se dice que* $\{a_n\}$ *es* oscilante *si no es convergente ni divergente.*

5.2. Series: Definiciones y propiedades

Definición 5.2.1. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Llamamos* ***sucesión de sumas parciales*** *de* $\{a_n\}$ *a la sucesión* $\{S_n\}$ *definida por*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

El par $(\{a_n\},\ \{S_n\})$ *se llama* ***serie*** *asociada a* $\{a_n\}$ *y se denota por* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definición 5.2.2. *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *se dice que es* ***convergente*** *(resp.* ***divergente, oscilante****) si lo es la sucesión* $\{S_n\}$. *Si fuese convergente, llamamos* suma *de la serie al límite de* $\{S_n\}$ *y escribimos* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim S_n$.

Proposición 5.2.3. *Sean* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *dos series convergentes y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se verifica:*

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ *es convergente y* $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda a_n)$ *es convergente y* $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Proposición 5.2.4. *En toda serie convergente o divergente, se pueden sustituir varios términos por su suma efectuada, sin que varíe el carácter ni la suma de la serie.*

La propiedad asociativa no es válida para sucesiones oscilantes y la disociativa no es válida en general.

Los siguientes resultados son válidos para todo tipo de series:

Teorema 5.2.5 (Condición necesaria de convergencia). *Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

El recíproco no es cierto. Basta considerar $a_n = 1/n$ $(n \in \mathbb{N})$.

5.3. Series de términos positivos. Criterios de convergencia

Definición 5.3.1. *Una serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *se dice que es* de términos positivos *si* $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Nota 5.3.2. Una serie de términos positivos nunca puede ser oscilante, ya que su sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es monótona creciente. Por tanto, una tal serie converge si y sólo si $\{s_n\}$ está acotada.

Teorema 5.3.3 (Criterio de comparación directa).

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *son series de términos positivos, entonces:*

a) *Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge y* $b_n \leq a_n$ *a partir de un cierto* n_0, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge.*

b) *Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge y* $b_n \geq a_n$ *a partir de un cierto* n_0, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge.*

Teorema 5.3.4 (Criterio de comparación por paso al límite).

Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *dos series de términos positivos. Se verifica:*

a) *Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge y* $\lim \frac{b_n}{a_n} = l \geq 0$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *converge.*

b) *Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge y* $\lim \frac{b_n}{a_n} = l > 0$ *ó* $+\infty$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *diverge.*

Estos criterios necesitan del conocimiento del carácter de algunas series que sirvan de test. Utilizaremos habitualmente la serie armónica generalizada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ que converge si $\alpha > 1$ y diverge si $0 < \alpha \leq 1$, o la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ $(r > 0)$, que converge si $0 < r < 1$ y diverge si $r \geq 1$.

Teorema 5.3.5 (Criterio de condensación de Cauchy). *Si* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *es una serie de términos positivos y la sucesión* $\{a_n\}$ *es decreciente, entonces las series* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ *tienen el mismo carácter.*

Teorema 5.3.6 (Criterio de Prigsheim). *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie de términos positivos:*

a) *Si* $\exists \alpha > 1 : \lim n^\alpha a_n \geq 0$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

b) *Si* $\exists \alpha \leq 1 : \lim n^\alpha a_n > 0$ *(ó* $+\infty$*), entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Teorema 5.3.7 (Criterio del Cociente o de D'Alambert). *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y* $\alpha = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$*:*

a) *Si* $\alpha < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

b) *Si* $\alpha > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Teorema 5.3.8 (Criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y* $\alpha = \lim \sqrt[n]{a_n}$*:*

a) *Si* $\alpha < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

b) *Si* $\alpha > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Teorema 5.3.9 (Criterio de Raabe). *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y* $\alpha = \lim n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$*:*

a) *Si* $\alpha > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

b) *Si* $\alpha < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Teorema 5.3.10 (Criterio logarítmico). *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y* $\alpha = \lim \frac{\log(1/a_n)}{\log n}$:

a) *Si* $\alpha > 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

b) *Si* $\alpha < 1$, *entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

5.4. Series alternadas. Teorema de Leibnitz

Definición 5.4.1. *Una serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *se dice que es* alternada *si se verifica que* $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n \cdot b_{n+1} < 0$.

En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, se considerará que $b_1 > 0$, por lo que podremos escribir las series alternadas como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \text{ con } a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.4.2 (Teorema de Leibnitz). *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *una serie alternada con* $\{a_n\}$ *decreciente. Entonces* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *converge si y sólo si* $\lim a_n = 0$. *En ese caso, si* $\{S_n\}$ *es la sucesión de sumas parciales y* S *es la suma de la serie, se verifica:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < (-1)^n(S - S_n) < a_{n+1}$. *Es decir, el error de aproximación es menor que el primer término despreciado.*

5.5. Serie de potencias. Radio de convergencia

5.5.1. Definiciones

Definición 5.5.1. *Sea* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de números reales y* $a \in \mathbb{R}$. *Se llama* serie de potencias *centrada en* a *a la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Se llama radio de convergencia *de la serie al número real* $r = 1/\lambda$ *siendo*

$$\lambda = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}.$$

Teorema 5.5.2. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *una serie de potencias de radio de convergencia* r. *Se verifica:*

1) *La serie converge absolutamente en* $(a-r, a+r)$.

2) *La serie no converge en* $\mathbb{R} \setminus [a-r, a+r]$.

Los ejemplos $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$ nos muestran que en los puntos extremos del intervalo de convergencia $(a-r, a+r)$ todos los casos de convergencia/divergencia son posibles.

5.5.2. Continuidad y derivabilidad

Definición 5.5.3. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *una serie de potencias de radio de convergencia* r. *La función* $f:(a-r,a+r)\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

se dice que está definida por la serie de potencias.

Teorema 5.5.4. *La función* $f:(a-r,a+r)\to\mathbb{R}$ *anterior, es continua en* $(a-r,a+r)$.

Teorema 5.5.5. *Si* $f(x)$ *es la función definida por la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *de radio de convergencia* r, *entonces la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ *tiene radio de convergencia* r, *y si* $g(x)$ *es la función definida por dicha serie de potencias, entonces* $f'(x)=g(x),\ \forall x\in(a-r,a+r)$.

Corolario 5.5.6. *Una función definida por una serie de potencias admite derivadas de todos los órdenes en su dominio de definición. Además, si* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, *entonces* $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

5.5.3. Desarrollos en serie. Funciones analíticas

Definición 5.5.7. *Una función* f *se dice que es de* clase infinita *en* $S\subseteq\mathbb{R}$, *y se escribe* $f\in\mathcal{C}^{\infty}(S)$, *cuando es indefinidamente derivable en* S.

Definición 5.5.8. *Se dice que una función* $f:S\to\mathbb{R}$ *es* analítica *en un punto* $a\in\overset{\circ}{S}$ $(f\in\mathcal{C}^{\omega}(a))$, *cuando* f *puede expresarse en un entorno de* a *como una serie de potencias centrada en* a, *es decir:*

$$f\in\mathcal{C}^{\omega}(a)\Leftrightarrow\exists a_n\in\mathbb{R},\ n\geq 0\ y\ \exists E(a)\subset S:\forall x\in E(a)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Se dice que f es analítica *en un abierto $S \subseteq \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{C}^\omega(S)$), cuando $f \in \mathcal{C}^\omega(a)$, $\forall a \in S$.*

Definición 5.5.9. *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(a)$. Se llama* serie de Taylor *asociada a f en a a la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Por tanto, una función f de $\mathcal{C}^\infty(a)$ es analítica cuando su serie de Taylor converge a f en un entorno de a.

El siguiente teorema nos proporciona un criterio para la analiticidad de una función f.

Teorema 5.5.10. *Sean $f : S \to \mathbb{R}$, $a \in S$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$. Una condición necesaria y suficiente para que f sea analítica en a es que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$, donde $T_n(x)$ es el término complementario del desarrollo de Taylor de f.*

Ejercicios y Problemas

1.- Estudiar el carácter de las series cuyos términos generales son:

$a)$ $n\sqrt{n^2+1}$, $b)$ $\dfrac{n^2}{n+1}$, $d)$ $(2n)^{-1}$, $e)$ $\dfrac{n^3}{n!}$ $f)$ $\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$, $g)$ $\dfrac{1}{n2^n}$,

$h)$ $\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$, $i)$ $\dfrac{n!}{n^n}$, $j)$ $\dfrac{3n-1}{\sqrt{2^n}}$ $k)$ $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, $l)$ $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}5^n$.

2.- Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las series cuyos términos generales son:

$a)$ $\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $b)$ $(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, $c)$ $\dfrac{(-1)^n}{n^a}$, $d)$ $(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

3.- Se considera la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{n^2+n}$

a) Estudiar el carácter según los valores de $a>0$.

b) Probar que si $a=-1$, la serie es convergente.

c) Obtener la suma para $a=1$.

4.- a) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}|x-3|^n$ según los valores de $x\in\mathbb{R}$.

b) Si para $x=4$ es convergente, entonces súmese.

5.- a) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n^2-1)p^n}{(n+p)2^{n+p}}$, según los valores de $p>0$.

b) Sumarla, si se puede, para $p=1$. c) ¿Es convergente para $p=-1$?

6.- Hallar el radio de convergencia de las series de potencias:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-1)^n}{(n+2)(n+3)}$; $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n\log n}{\sqrt{n}+1}$; $c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+a^n}$, $a>1$; $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$;

$e)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^n x^n$; $f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$; $g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$; $h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{b^n}$, $b>0$.

Capítulo 6

Cálculo de primitivas

6.1. Definición y propiedades

Definición 6.1.1. *Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con S abierto. Una* ***primitiva*** *de f es una función $F : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in S$.*

Proposición 6.1.2. *Si F es una primitiva de f, entonces todas las primitivas de f son de la forma $F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$*

Definición 6.1.3. *Se llama* ***integral indefinida*** *de f al conjunto de todas sus primitivas, y se denota por*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Propiedades 6.1.4.

1.- $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *constante.*

2.- $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Estas propiedades junto con la tabla de integrales inmediatas, nos permiten realizar variados ejercicios como inicio en el cálculo de primitivas.

6.2. Métodos generales de integración

- **Método de descomposición**. Se basa en la propiedad 6.1.4 anterior.

  Si $f(x)$ se puede escribir como una combinación lineal de funciones, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, entonces

  $$\int f(x)dx = \int \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\right] dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int f_i(x)\, dx.$$

- **Método de sustitución**. Se basa en la regla de la cadena.

  Si $F(x) = \int f(x)\, dx$, entonces $F'(x) = f(x)$, y $(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$. Por tanto

  $$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(t).$$

- **Método por partes**. Se basa en la regla de la derivación del producto.

  Si $F'(x) = f(x),\ G'(x) = g(x)$, entonces

  $$(FG)'(x) = F(x)g(x) + f(x)G(x).$$

  Luego

  $$(FG)(x) = \int F(x)g(x)\, dx + \int f(x)G(x)\, dx,$$

  por lo que

  $$\int F(x)g(x)\, dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\, dx.$$

6.3. Integración de funciones racionales

Se basa en el método de integración por descomposición.

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una función racional tal que el grado del polinomio $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Si fuese $\text{gr}(p) \geq \text{gr}(q)$, dividiendo obtendríamos: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ y el grado del resto es menor que el del divisor.

Descomponiendo $q(x)$ en factores, puede ocurrir:

a) $q(x)$ sólo tiene raíces reales simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; entonces existen $A_1, A_2, \ldots A_N \in \mathbb{R}$ tales que
$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$, luego

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{A_i}{x-\alpha_i}\,dx,$$

que son integrales inmediatas.

b) $q(x)$ tiene raíces reales múltiples, por ejemplo, raíz β con multiplicidad $i \in \mathbb{N}$. En este caso se procede a la descomposición de $\frac{p(x)}{q(x)}$ en fracciones simples en la misma forma que en el caso a), pero con la particularidad que al factor $(x-\beta)^i$ le corresponderían los sumandos

$$\frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \cdots + \frac{B_i}{(x-\beta)^i}.$$

La única novedad en la integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ sería $\int \frac{B_i}{(x-\beta)^i}\,dx$, que es inmediata también.

c) $q(x)$ tiene raíces complejas simples. Supongamos que $q(x)$ tiene la raíz compleja $z_1 = \alpha + \beta i$, por consiguiente, tendría también la raíz conjugada $\overline{z_2} = \alpha - \beta i$.

Como

$$[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)] = (x-\alpha)^2 + \beta^2 = ax^2 + bx + c,$$

en la descomposición en fracciones al par de raíces complejas le corresponderá la fracción

$$\frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

cuya integral se reduce a dos inmediatas con el cambio de variable $x - \alpha = \beta t$.

6.4. Integrales reducibles a racionales

Sea R una función racional en sus argumentos.

a) $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$.

- Si R es impar en seno, hacemos el cambio $\cos x = t$.

- Si R es impar en coseno, hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t$.
- Si R es par en seno y coseno, hacemos el cambio $\tan x = t$.
- Si no se da ninguno de los casos anteriores, hacemos el cambio $\tan(x/2) = t$.

b) $\displaystyle\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right] dx,$

con $m, p, \ldots, r, \in \mathbb{Z},\ n, q, \ldots, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Efectuamos el cambio:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\alpha}, \text{ con } \alpha = \text{ m.c.m. } (n, q, \ldots, s).$$

c)
- $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right) dx$. Hacemos el cambio $bx = a \operatorname{sen} t$ o bien $bx = a\cos t$.
- $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right) dx$. Hacemos el cambio $bx = a\tan t$.
- $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right) dx$. Hacemos el cambio $bx = a\sec t$.

d) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx.$

Escribiendo $ax^2 + bx + c = a(x+\alpha)^2 \pm \beta^2$ se reduce al caso c), pero también podemos proceder así:

- Si $a > 0$, hacemos el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$.
- Si $c > 0$, hacemos el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}$.
- Si $a < 0,\ c < 0$ hacemos el cambio $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$, con α raíz de $ax^2 + bx + c$.

e) $\displaystyle\int x^p \left(a + bx^q\right)^r dx,\ a, b \in \mathbb{R},\ p, q, r \in \mathbb{Q},$

- Si r es entero, hacemos el cambio $x^q = t$.
- Si $\dfrac{p+1}{q}$ es entero, hacemos el cambio $a + bx^q = t^{\alpha}$, donde α es el denominador de r.
- Si $\dfrac{p+1}{q} + r$ es entero, hacemos el cambio $\dfrac{a + bx^q}{x^q} = t^{\alpha}$, donde α es el denominador de r.

Ejercicios y Problemas

1.- Resolver las siguientes integrales:

$$a)\int (x^2-1)^2dx,\quad b)\int (x^2-1)^2xdx,\quad c)\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}-\sqrt[3]{x}\right)dx,\quad d)\int \sqrt{3x+2}dx,$$

$$e)\int (6x^2-7)^{\frac{2}{5}}xdx,\quad f)\int \cos(6x-7)dx,\quad g)\int x\sqrt{x^2+4}dx,\quad h)\int x^2(x^3-2)^{-\frac{12}{7}}dx,$$

$$i)\int x\,\mathrm{sen}(3x^2-5)dx,\quad j)\int x^6(7x^7+\pi)^8\,\mathrm{sen}(7x^7+\pi)^9dx,\quad k)\int \cos x e^{2\,\mathrm{sen}\,x}dx,\quad l)\int \frac{(\sqrt{x}+4)^2}{\sqrt{x}}dx,$$

$$m)\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx,\quad n)\int \frac{x\,\mathrm{sen}\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx,\quad o)\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\cos^2 x}dx,\quad p)\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx,\quad e)\int \frac{1}{9x^2+4}dx.$$

2.- Resolver las siguientes integrales de funciones racionales:

$$a)\int \frac{1}{x^2-4}\,dx,\quad b)\int \frac{x^3}{x^3+x^2-6x}\,dx,\quad c)\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx,\quad d)\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx,$$

$$e)\int \frac{x^3}{x^2+2x+4}\,dx,\quad f)\int \frac{1}{x^3+x}\,dx,\quad g)\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx,\quad h)\int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx.$$

3.- Integrar por partes:

$$a)\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx\quad ,b)\int xe^x\,dx,\quad c)\int x^2\log x\,dx,\quad d)\int x\sqrt{1+x}\,dx,\quad e)\int \arctan x\,dx,$$

$$f)\int x^2\,\mathrm{sen}\,x\,dx,\quad g)\int x^3e^{2x}\,dx,\quad h)\int x\arctan x\,dx,\quad i)\int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx,\quad j)\int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx.$$

4.- Obtener las primitivas de las siguientes funciones irracionales:

$$a)\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx,\quad b)\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx,\quad c)\int \frac{1}{(4-9x)\sqrt{x}}\,dx,\quad d)\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})(1+3x)}$$

$$e)\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx,\quad f)\int \frac{x}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-x-2}\,dx,\quad g)\int \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\,dx,\quad h)\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\,dx.$$

5.- Hallar las siguientes primitivas de funciones trascendentes:

$$a)\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\,dx, \quad b)\int \frac{\tan^3 x + \tan x}{1-2\tan x}\,dx, \quad c)\int \frac{\log(2x)}{x\log(4x)}\,dx, \quad d)\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}\,dx,$$

$$e)\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}dx, \quad f)\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \tan x}, \quad g)\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x}, \quad h)\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos x\sqrt{1+\cos x}}.$$

6.- Hallar las siguientes primitivas , efectuando el cambio de variable que proceda:

$$a)\int \frac{dx}{x\sqrt{9-4x^2}}, \quad b)\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x}\,dx, \quad c)\int \frac{\sqrt{4+9x^2}}{x}\,dx \quad d)\int \frac{dx}{x\sqrt{9-4x^2}},$$

$$e)\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx, \quad f)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx, \quad g)\int \frac{16dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}, \quad h)\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$$

7.- Hallar las siguientes primitivas:

$$a)\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx, \quad b)\int \frac{x-2}{x^2-4x+2}\,dx, \quad c)\int \frac{e^{2x}}{e^x-2}\,dx, \quad d)\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}},$$

$$e)\int \frac{\log x}{x}\,dx, \quad f)\int e^{x/3}\operatorname{sen}(3x)\,dx, \quad g)\int x^3e^{2x}\,dx, \quad h)\int \operatorname{sen}^3 x\,dx, \quad i)\int \operatorname{sen}^4 x\,dx,$$

$$j)\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx, \quad k)\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad l)\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\tan x}\,dx, \quad m)\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{9+\cos^4 x}\,dx.$$

Capítulo 7

La integral definida

7.1. Integral de Riemann de una función

En un principio (Euler, ca. 1750), el cálculo integral se definía como la operación inversa a la diferenciación, sin embargo, en la primera mitad del siglo XIX se empezó a ver la necesidad de definir la integral de una función directamente, retomando la vieja idea del área. Los primeros trabajos en este sentido son debidos a Cauchy. La idea era utilizar el concepto de límite para definir la integral como el límite de una suma de rectángulos y después probar la relación con la derivada, es decir, el teorema fundamental de cálculo.

Cauchy desarrolló estas ideas sólo para funciones continuas. Puesto que no todas las funciones iban a ser integrables, pareja a la necesidad de extender la integral, surge la necesidad de establecer criterios para saber que funciones son susceptibles de admitir una integral extendiendo la definición de Cauchy.

Un paso decisivo en este camino lo dio Riemann, que amplió la definición de integral para funciones no necesariamente continuas, estableciendo un criterio de integrabilidad. Es lo que hoy conocemos como la integral de Riemann, que exponemos a continuación.

Definición 7.1.1. *Sea* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *Una* ***partición*** P *del intervalo* $[a,b]$ *es un conjunto* $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\} \subset [a,b]$ *tal que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. *Se llama* ***diámetro*** *de la partición a* $\max\{x_i - x_{i-1};\ i = 1, \ldots, n\}$.

Dadas dos particiones P_1, P_2 de un mismo intervalo, se dice que P_1 es más fina que P_2 si $P_2 \subset P_1$.

Nota 7.1.2. Llamaremos $\mathcal{P}[a,b]$ al conjunto de las particiones de $[a,b]$. Si $P,\ Q \in \mathcal{P}[a,b]$ la partición $R = P \cup Q \in \mathcal{P}[a,b]$ es más fina que P y que Q.

Definición 7.1.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$, y sean*

$$m_i = \text{ínf}\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

- *Se llama **suma inferior de Riemann** de f respecto de P a*

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

- *Se llama **suma superior de Riemann** de f respecto de P a*

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Exponemos ahora unas propiedades de las sumas superior e inferior que nos permitirán definir la integral superior e inferior de Riemann, y por consiguiente, la integral.

Proposición 7.1.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y $P,\ Q \in \mathcal{P}[a,b]$, se verifica:*

1. $L(f,P) \leq U(f,P)$.
2. *Si Q es más fina que P entonces, $L(f,P) \leq L(f,Q)$ y $U(f,P) \geq U(f,Q)$.*
3. $L(f,P) \leq U(f,Q)$.

Nota 7.1.5. El conjunto de las sumas inferiores de Riemann $\{L(f,P) :\ P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ está acotado superiormente, siendo una cota superior cualquier $U(f,P)$.
Análogamente, el conjunto de las sumas superiores de Riemann $\{U(f,P) :\ P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ está acotado inferiormente, siendo una cota inferior cualquier $L(f,P)$.

Definición 7.1.6.

- *Llamamos* ***integral inferior*** *de f en $[a,b]$ a*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,P) :\ \forall P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

- *Llamamos* ***integral superior*** *de f en $[a,b]$ a*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \text{ínf}\{U(f,P) :\ \forall P \in \mathcal{P}[a,b]\}.$$

Es claro que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Definición 7.1.7. *Se dice que f es* ***integrable Riemann*** *en $[a,b]$ (lo que se denota por $f \in \mathcal{R}[a,b]$), si $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.*
Al valor común se le llama ***integral de Riemann*** *de f en $[a,b]$, y se escribe*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

7.2. Funciones integrables

Comenzamos la sección con algún ejemplo de funciones que sean integrables y que no lo sean, como los siguientes:

Ejemplos 7.2.1.

- Sea f una función constante, $f(x) = k$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y además, $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

- Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

  En este caso, f no es integrable Riemann en $[0,1]$.

El siguiente resultado es una importante caracterización de la integrabilidad Riemann y tiene la ventaja de que en su enunciado no se necesita el valor de la integral.

Teorema 7.2.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Teorema 7.2.3. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

Teorema 7.2.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*
Además, si P_n es la partición de $[a,b]$ resultante de dividir el intervalo $[a,b]$ en n intervalos iguales de amplitud $\dfrac{b-a}{n}$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$$

y si $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se verifica

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_i).$$

Teorema 7.2.5. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ está acotada y es continua salvo en un número finito de puntos, entonces, $f \in \mathcal{R}[a,b]$.*

7.3. Propiedades de las funciones integrables

Proposición 7.3.1. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$. Se verifica*

1) $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

2) $\alpha f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

3) $\mathcal{R}[a,b] = \mathcal{R}[a,c] \cap \mathcal{R}[c,b]$, y $\forall f \in \mathcal{R}[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4) $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.

5) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

Para que formalmente sean válidas estas propiedades en los casos extremos, definimos:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \quad \text{Si } b > a, \ \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposición 7.3.2.

1) *Si* $f \geq 0$ *en* $[a,b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2) *Si* $f \geq g$ *en* $[a,b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Teorema 7.3.3 (del valor medio integral)**.** *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada y* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Si* $m = \inf_{[a,b]} f$ *y* $M = \sup_{[a,b]} f$, *entonces*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Además, si f *es continua en* $[a,b]$,

$$\exists c \in [a,b] \ \textit{tal que} \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 7.3.4. *Sea* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y* $g : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces* $g \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

7.4. Teorema fundamental del Cálculo Integral

En esta sección abordamos este importante teorema y su corolario más conocido, la regla de Barrow, que nos permitirá evaluar la integral de una función cuando se conozca una de sus primitivas.

Teorema 7.4.1. *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. La función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b])$$

es continua en $[a,b]$.

Teorema 7.4.2 (Teorema fundamental del Cálculo integral)**.** *Sea $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $(x \in [a,b])$ es derivable en c y además, $F'(c) = f(c)$.*

Corolario 7.4.3. *En las condiciones del teorema anterior, si f es continua en $[a,b]$, entonces $F(x)$ es derivable en (a,b), con $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, por lo que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.*

Corolario 7.4.4 (Regla de Barrow)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

7.5. Integración por sustitución y por partes

Teorema 7.5.1 (Integración por partes)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables tales que $f', g' \in \mathcal{R}[a,b]$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Teorema 7.5.2 (Integración por sustitución)**.** *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable con $g' \in \mathcal{R}[a,b]$, y sea f continua en $g([a,b])$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

7.6. Integrales impropias

Se debe a Cauchy la primera extensión de la integral para funciones definidas en un intervalo no acotado y para funciones no acotadas en los extremos del intervalo, es lo que conocemos en la actualidad como valor principal de Cauchy. La definición de integral impropia se debe a Riemann.

7.6.1. Integración en intervalos no compactos

Definición 7.6.1. *Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{R}[a, b]$ para todo $b > a$. Se llama* ***integral impropia de primera especie*** *de f en $[a, +\infty)$ al límite $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$. Si existe el límite y es finito, se dice que la integral impropia es* convergente*; en caso contrario se dice que la integral impropia* diverge*. Si es convergente se escribe:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Notas 7.6.2.

1) Si f tiene primitiva F en $[a, +\infty)$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} [F(b) - F(a)] = \left[\lim_{b\to+\infty} F(b)\right] - F(a).$$

2) Si $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{R}[a, b]$ para todo $a < b$, se define análogamente:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Definición 7.6.3. *Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{R}[a, c]$ para todo $c \in (a, b)$. Se llama* ***integral impropia de segunda especie*** *de f en $[a, b)$ al límite $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$. Si existe el límite y es finito, se dice que la integral impropia es convergente, y su valor se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$. En caso contrario se dice que la integral impropia diverge.*

Análogamente se procede si f está definida en $(a, b]$.

No se exige en esta definición que f sea acotada. De ser así, asignándole a f un valor en b, comprobaríamos que es integrable en $[a, b]$, que existe la integral impropia y que tienen el mismo valor.

Teorema 7.6.4. *Sea I algún intervalo de la forma $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$. Y sean $f,g : I \to \mathbb{R}$ tales que $\int_I f(x)\,dx$, $\int_I g(x)\,dx$ convergen, entonces también convergen $\int_I (f(x)+g(x))\,dx$ y $\int_I \alpha g(x)\,dx$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y se verifica:*

$$\int_I (f(x)+g(x))\,dx = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx, \quad \int_I \alpha g(x)\,dx = \alpha \int_I g(x)\,dx.$$

Definición 7.6.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $(a<b)$. Decimos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$* converge *si existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergen; en ese caso,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Puede probarse que en la definición anterior el valor de a es irrelevante.

Definición 7.6.6. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{R}[-a,a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Se llama* ***valor principal de Cauchy*** *de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ al límite $\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.*

Nota 7.6.7. Evidentemente no coinciden en general el valor principal de Cauchy con la integral impropia en todo $\mathbb{R}$ (tomar por ejemplo $f(x)=x$), pero si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces existe el valor principal de Cauchy y ambos coinciden.

Definición 7.6.8. *Sea $f : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ y $f \in \mathcal{R}[b,c]$ $\forall [b,c] \subset (a,+\infty)$. Se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es* convergente *si existe un $c > a$ tal que $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ convergen, en cuyo caso,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

A estas integrales se les llama ***integrales mixtas de primera y de segunda especie.***

Es claro que pueden darse definiciones análogas para otros tipos de intervalos.

7.6.2. Criterios de convergencia

Los resultados que vamos a exponer son válidos tanto para integrales impropias de primera especie como de segunda especie, por lo que los enunciaremos sólo para las de primera especie.

Teorema 7.6.9. *Sea la función* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *con* $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$ *y* $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $(b > a)$. *Entonces* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge si y sólo si existe* $M > 0$ *tal que* $\int_a^b f(x)dx \leq M$, $\forall b \geq a$.

Teorema 7.6.10 (Criterio de comparación)**.** *Sean las funciones* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *tales que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$ *con* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\forall b > a$. *Se verifica:*

- *Si* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *converge, entonces* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge y es*
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$
- *Si* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge, entonces* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *diverge.*

Teorema 7.6.11 (Criterio de comparación por paso al límite)**.** *Sean las funciones* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *tales que* $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, +\infty)$ *con* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $\forall b > a$ *y* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$. *Se verifica:*

- *Si* $0 < \lambda < +\infty$, *las integrales* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *e* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *tienen el mismo carácter.*
- *Si* $\lambda = 0$, *la convergencia* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *implica la convergencia de* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.
- *Si* $\lambda = +\infty$, *la convergencia* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *implica la convergencia de* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Estos criterios de comparación necesitan del conocimiento del carácter de alguna integral impropia que sirva de test. Habitualmente utilizaremos las integrales:

- $\int_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$ $(a > 0)$ que converge si $\alpha > 1$.

- $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $(a>0)$ que converge si $\alpha<1$.

Teorema 7.6.12.

1) *Sea* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ *integrable Riemann en* $[a,b]$, $\forall b\geq a$. *Se verifica:*

   - *Si existe* $p>1$ *tal que* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$ *con* $0\leq\lambda<+\infty$, *entonces* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge.*
   - *Si existe* $p\leq 1$ *tal que* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$ *con* $0<\lambda\leq+\infty$, *entonces* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge.*

2) *Sea* $f:(0,b]\to\mathbb{R}$ *integrable Riemann en* $[a,b]$, $\forall a\in(0,b)$. *Se verifica:*

   - *Si existe* $p<1$ *tal que* $\lim\limits_{x\to0^+} x^p f(x)=\lambda$ *con* $0\leq\lambda<+\infty$, *entonces* $\displaystyle\int_0^{b} f(x)\,dx$ *converge.*
   - *Si existe* $p\geq 1$ *tal que* $\lim\limits_{x\to0^+} x^p f(x)=\lambda$ *con* $0<\lambda\leq+\infty$, *entonces* $\displaystyle\int_0^{b} f(x)\,dx$ *diverge.*

Teorema 7.6.13 (Criterio integral para series)**.** *Sea* $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ *una función decreciente con* $f(x)>0$, *y* $\{a_n\}$ *una sucesión de términos positivos tal que* $a_n=f(n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. *Bajo estas condiciones, la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y la integral impropia* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *tienen el mismo carácter.*

7.6.3. Convergencia absoluta

Cuando el signo del integrando no es constante, es más complicado estudiar la convergencia de la integral impropia. Por analogía con series numéricas, estudiamos la convergencia absoluta y condicional de estas integrales.

Definición 7.6.14. *Sea* $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. *Se dice que la integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *es* ***absolutamente convergente*** *si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *es convergente.*

Definición 7.6.15. *Si* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente pero* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *es divergente, se dice que la integral impropia es* ***condicionalmente convergente.***

Análogamente se definen los conceptos anteriores para las integrales impropias de segunda especie.

Teorema 7.6.16. *Si* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge absolutamente, entonces* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *es convergente.*

Nota 7.6.17. El recíproco del teorema anterior no es cierto, pues se puede probar que $\int_1^{+\infty} x^{-p} \operatorname{sen} x\, dx$ converge si $p > 0$. Pero es absolutamente convergente si $p > 1$ y la convergencia es condicional para $0 < p \leq 1$, ya que en este caso, la integral $\int_1^{+\infty} x^{-p} |\operatorname{sen} x|\, dx$ diverge.

7.6.4. Las funciones Gamma y Beta

Definición 7.6.18. *Se llama* ***función gamma de Euler*** *a la función* $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Nota 7.6.19. Esta definición tiene sentido, pues si consideramos la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx$$

tenemos que, aplicando los criterios de convergencia anteriores,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx \text{ converge } \forall p \in \mathbb{R}$$

y

$$\int_0^1 e^{-x} x^{p-1}\, dt \text{ converge } \forall p > 0.$$

Por tanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx \text{ converge } \forall p > 0.$$

Proposición 7.6.20.

1) $\Gamma(1) = 1$.

2) $\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$.

Definición 7.6.21. *Se llama* ***función beta de Euler*** *a la aplicación* $\mathbf{B} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathbf{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Vemos que esta definición tiene sentido probando el siguiente:

Teorema 7.6.22. *Si* $x,\ y > 0$, *la integral impropia* $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$ *es convergente.*

Proposición 7.6.23. *Se verifica:*

- $\mathbf{B}(x,y) = \mathbf{B}(y,x)$.
- $\mathbf{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Como aplicación directa de esta última igualdad, y teniendo presente que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, podemos deducir el valor de la integral de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, tan importante, entre otras cosas, para el Cálculo de Probabilidades.

7.7. Aplicaciones de la integral

7.7.1. Área de figuras planas

a) Coordenadas cartesianas

Definición 7.7.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. El área del recinto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ viene dada por la integral:*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Esta definición se puede extender a otros recintos planos.

Definición 7.7.2.

- *Si la función fuese negativa, el área del recinto*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$$

sería:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

- *Si la función no tiene signo constante, el área sería la suma de las áreas parciales de los recintos donde se conserva el signo.*

- *Si se trata del área del recinto delimitado por dos curvas*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

el área será:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

b) Coordenadas polares

Se puede describir una curva en la forma $\rho = \rho(\omega)$ siendo ρ la distancia de un punto de la curva al origen y $0 \leq \omega < 2\pi$ el ángulo que forma el radio vector con la parte positiva

del eje de abscisas. En este caso, el área del recinto comprendido entre la curva y los radios vectores $\rho = \alpha$ y $\rho = \beta$, viene dada por la integral

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\omega)\, d\omega.$$

c) Coordenadas paramétricas

Si la curva viene dada por sus ecuaciones paramétricas $x = x(t),\ y = y(t)$, un sencillo cálculo sobre la fórmula de la definición 4.1.1 muestra que el área del recinto dado en dicha definición es:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|\, dt.$$

donde $t_1 = x^{-1}(a)$, y $t_2 = x^{-1}(b)$.

7.7.2. Longitud de arcos de curva.

a) Coordenadas cartesianas

Se define la longitud del arco de curva $y = f(x)$ entre los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ como

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Coordenadas polares

Si la curva viene dada en coordenadas polares $\rho = \rho(\omega)$, la longitud del arco comprendido entre $A(\alpha, \rho(\alpha))$ y $B(\beta, \rho(\beta))$ es

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\omega))^2 + (\rho'(\omega))^2}\ d\omega.$$

Coordenadas paramétricas

Si la curva viene dada en coordenadas paramétricas $x = x(t),\ y = y(t)$, la longitud del arco de curva comprendido entre $A(x(a), y(a))$ y $B(x(b), y(b))$ viene dada por

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\ dt.$$

7.7.3. Volúmenes

Definición 7.7.3. *Sea un conjunto* $\boldsymbol{C} \subset \mathbb{R}^3$ *con* $\boldsymbol{C} \subset [a,b] \times \mathbb{R}^2$. *Asimismo, sea* $A(x)$ *el área de la región plana* $\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \boldsymbol{C}\}$. *Si* $A(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, *entonces el* volumen *del sólido* $\boldsymbol{C}$ *es:*

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

El papel que juega en la definición el eje OX puede desempeñarlo otro eje cualquiera, considerando entonces secciones del sólido perpendiculares a dicho eje. La definición anterior expresa el "principio de Cavalieri" de cálculo de volúmenes.

Como aplicación de esta fórmula, calculamos los volúmenes de cuerpos de revolución.

Definición 7.7.4. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada. Consideremos el conjunto de* $\mathbb{R}^3$ *dado por* $\boldsymbol{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b],\ y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$. *Si* $(f(x))^2 \in \mathcal{R}[a,b]$, *el volumen de* $\boldsymbol{C}$ *es:*

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Nota 7.7.5. Análogamente, si $f(x)$ admite inversa en $[a,b]$ y es $c = f^{-1}(a)$, y $d = f^{-1}(b)$, el volumen del cuerpo generado al girar la región

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ 0 \leq x \leq f^{-1}(y)\}$$

alrededor del eje de ordenadas es:

$$V = \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2\,dy.$$

Nos proponemos ahora definir el volumen del sólido generado al girar el recinto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ alrededor del eje de ordenadas. Aproximando dicho volumen por cilindros concéntricos, llegamos a la siguiente definición:

Definición 7.7.6. *En las condiciones de la anterior definición, el volumen del cuerpo generado al girar la región*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

alrededor del eje de ordenadas es:

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|\,dx.$$

7.7.4. Área de superficies de revolución

Se trata, en esta seción, de encontrar la superficie lateral del sólido $\mathbf{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in [a,b],\ y^2+z^2 \leq (f(x))^2\}$, generado al girar alrededor del eje de abscisas la región $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

El razonamiento que nos lleva a definir el área será la aproximación por superficies de troncos de cono.

Definición 7.7.7. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable, y $f'(x)$ integrable en $[a,b]$, el área lateral del sólido*

$$\boldsymbol{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \in [a,b],\ y^2+z^2 \leq (f(x))^2\}$$

viene dada por la integral

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

7.7.5. Aplicaciones físicas

Son muchas las aplicaciones de la integral al campo físico, de entre ellas destacamos las siguientes:

Momentos estático

El momento estático respecto de los ejes de abscisas y de ordenadas de una curva $x = x(s),\ y = y(s)$ donde el parámetro s es la longitud del arco es:

$$M_x = \int_0^L y(s)\,ds, \quad M_y = \int_0^L x(s)\,ds,$$

con L la longitud total del arco.

Los respectivos momentos estáticos de una figura plana $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)$, son:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)|f(x)|\,dx, \quad M_y = \int_a^b x|f(x)|\,dx.$$

Momentos de inercia

El momento de inercia respecto a un eje l de un sistema de n puntos materiales de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ es $I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$. Cuando la distribución de la masa sea continua,

$$I_l = \int_a^b h^2(x)m'(x)\,dx$$

donde $m(x)$ es la masa y $h(x)$ la distancia al eje OX, con a y b los puntos extremos del cuerpo en cuestión.

Centro de gravedad

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de gravedad de un arco de curva plana $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ son:

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \quad \overline{y} = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$$

donde L es la longitud del arco de curva.

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de gravedad de una región plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ son:

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int_a^b xf(x)\,dx, \quad \overline{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b (f(x))^2\,dx,$$

donde S es el área de la figura.

Trabajo

Si una fuerza variable $F = F(x)$ actúa en la dirección del eje de abscisas, el trabajo efectuado por la misma desde x_1 hasta x_2 viene dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx.$$

Ejercicios y Problemas

1.- Sea $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f no es integrable Riemann en el intervalo $[0, 1]$. Calcular las integrales superior e inferior.

2.- Sea $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x^2$. Usando la condición necesaria y suficiente de integrabilidad Riemann, probar $f, g \in R([0, 1])$ calculando el valor de cada integral.

3.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x(x-2))\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 (1 + x - \operatorname{tg} x)\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{1 + \cos x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\, dx$ e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\, dx$ f) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\, dx$

4.- Dar la derivada de f en los siguientes casos:

a) $f(x) = \displaystyle\int_1^{\arctan x} \cos t dt$ b) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} t \operatorname{sen} t dt.$

c) $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\log t}{\sqrt{t}} dt \quad x > 0.$ d) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\int_0^x t dt} t^2 dt.$

e) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} x \operatorname{sen}(\log t) dt.$ f) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} x^2 e^{-t^2} dt.$

g) $f(x) = \displaystyle\int_2^{x^3} \left(\int_8^y 1/(1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t)\, dt \right) dy$ h) $f(x) = \operatorname{sen}\left[\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_1^y e^{t^2}\, dt \right) dy \right]$

5.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t) dt = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Hallar $f(2)$.

6.- Hallar el área de las siguientes figuras:

a) $y = x$, $y = x + \operatorname{sen}^2 x$ en $[0, \pi]$.

b) $y^2 \geq 9x$, $x^2 + y^2 \leq 36$.

c) $x^2 + y^2 \leq 9$, $(x - 3)^2 + y^2 \leq 9$.

d) $y = 2\sqrt{ax} \quad y = 2\sqrt{a(2x-a)} \quad (a > 0)$

7.- Halla $a > 0$ tal que la curva $y = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ quede dividida en dos partes con igual área por la curva $y = a \operatorname{sen} x$.

8.- Hallar las longitudes de los arcos de curva:

a) $y = e^x$ en $[0, a]$.

b) $y = \log(\cos x)$, $0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$.

9.- Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX las curvas siguientes, entre los límites que se indican:

a) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $x = -a$, $x = a$ $(a, b > 0)$.

b) $x^2 + (y - 2R)^2 = R^2$, $-R \leq x \leq R$ $(R > 0)$.

10.- Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OY las curvas siguientes, entre los límites que se indican:

a) $y = 1 - x^2$, $0 < y < 1$.

b) $y = R - x$, $0 < y < R$ $(R > 0)$.

11.- Hallar el área de las superficies engendradas al girar las curvas siguientes alrededor del eje OX, entre los límites que se indican:

a) $y^2 = 2px$, $0 < x < 1$ $(p > 0)$.

b) $x^2 + (y - 2R)^2 = R^2$, $-R \leq x \leq R$ $(R > 0)$.

12.- a) Halla el área de la región del plano limitada por la curva $y = \tan x$, el eje de ordenadas y la recta $y = 1$.

b) Hallar el volumen del sólido engendrado al girar la región anterior alrededor del eje de abscisas.

13.- Sea la figura limitada por la curva $y = e^{-x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 1$. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por dicha figura al girar alrededor del EJE DE ORDENADAS.

14.- Calcular el área de la región del plano limitada por las curvas:

$y = x^2 e^x, \quad y = x^2\sqrt{1-x}$ y la recta $x = 1$.

15.- Dada la parábola $y^2 = 4x$, se pide:

a) Halla m para que el área de la figura limitada por la parábola y la recta $y = mx$, sea $\frac{1}{3}$.

b) Halla la longitud del arco de parábola delimitado por los puntos $A(1,2) \quad B(4,4)$.

16.- a) Calcular $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $\int f(x)\operatorname{sen} x dx = -f(x)\cos x + \int 3x^2 \cos x dx$. Hallar $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 2$

c) Calcular el área del sector circular determinado por la circunferencia $x^2+y^2 = 25$ y los radios trazados desde los puntos $A(3,4), \quad B(4,3)$ al origen.

17.- a) Hallar el área de la región de plano limitada por la curvas $y = e^x, \quad y = e^{-x}$, y la vertical $x = 1$.

b) Calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado por la rotación de la región anterior alrededor del eje de ordenadas.

c) Resolver la integral $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

18.- Dada la función $y = \log x$ se pide:

a) Área del recinto limitado por la curva, el eje de abscisas y las verticales $x = e^{-1}, \quad x = e$.

b) Volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la región anterior alrededor del eje de abscisas.

c) Longitud del arco de curva comprendido entre los puntos $A(1,0)$ y $B(2,\log 2)$.

19.- a) Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y verifica $\int_0^x f(t)dt = f(x)+\cos x$, calcula $f(0)$ y $f'(0)$

b) Calcular $\int_1^e \operatorname{sen}(\log x)\,dx$

c) Dada la curva de ecuación $y^2 = x^2 - x^4$, se pide: c1) Hallar el área que determina. c2) Hallar el volumen del cuerpo que se genera al girar alrededor del eje de abscisas. c3) Idem. alrededor del eje de ordenadas.

20.- Sea la región del plano limitada por la curva $y = 3+\operatorname{sen} x$ y las rectas $y = 3$, $x = \frac{\pi}{2}$. Hallar el volumen del cuerpo que se genera al girar dicha región alrededor del eje de abscisas. Idem alrededor del eje de ordenadas.

21.- Se considera la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Se pide:

a) Área de la región dada por $x^2 + y^2 \le 16, \quad y \ge 2$.

b) Longitud del arco de circunferencia comprendido entre los puntos $A(-2\sqrt{3},2)$ y $B(2\sqrt{2},2)$.

22.- Dada la curva de ecuación $y = \log\left(1-x^2\right)$, se pide:

a) Área de la región de plano comprendida entre la curva, el eje de abscisas y la recta $x = \frac{1}{2}$.

b) Longitud del arco de curva comprendido entre los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2},\log\frac{3}{4}\right)$.

23.- Volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la circunferencia $x^2+y^2=4$ alrededor de la recta $y=-3$.

24.- Se considera la porción de círculo de centro $(0,1)$ y radio 1 que está fuera del círculo de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$. Se pide:

a) Área de dicha región del plano.

b) Volumen del cuerpo de revolución que se engendra al girar la región anterior alrededor del eje OX.

c) Idem alrededor del eje OY.

25.- Calcular el área de la región de plano dada por $x^2 + y^2 \leq 4, \quad y^2 \leq 3x$. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar dicha región alrededor del eje a) de abscisas, b) de ordenadas.

26.- Calcular el área de la región del plano limitada por la curva $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ y las rectas $y = 0,\ x = 1,\ x = b\ (b > 1)$.

27.- Calcular el área encerrada por las curvas de ecuación en polares: $(r > 0)$

$a)\ \rho = r(1 + \cos\omega) \qquad b)\ \rho = r \qquad c)\ \rho = r\cos(2\omega).$

28.- Calcular el área encerrada por las curvas de ecuaciones en paramétricas: $(r > 0)$

$a)\ x = r\cos t,\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \qquad b)\ x = r(t - \mathrm{sen}\,t),\ y = r(1 - \cos t).$

29.- Hallar la longitud de las curvas de ecuaciones en polares: $(r > 0) \qquad a)\ \rho = r(1 + \cos\omega) \quad b)\ \rho = r\omega.$

30.- Hallar la longitud de las curvas de ecuaciones en paramétricas: $(r > 0)$

$a)\ x = r(t - \mathrm{sen}\,t),\ y = r(1 - \cos t) \qquad b)\ x = rcos^3 t,\ y = r\,\mathrm{sen}^3\,t.$

31.- Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias, y calcular el valor de las convergentes:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$, b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$, c) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$, d) $\int_0^1 x^2 \log x dx$,

e) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$, f) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x dx$, g) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$, h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

i) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, j) $\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2}dx$, k) $\int_0^1 \log x dx$, l) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

m) $\int_0^1 x \log x dx$, n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$, o) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$, p) $\int_0^{+\infty} x^3 e^x dx$.

32.- Hallar el área entre la curva $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ y sus asíntotas.

33.- a) Hallar el áres de la región de plano limitada por la curva $yx = 1$, y las rectas $x = 1$ e $y = 0$

b) Calcular el volumen engendrado por la región anterior al girar alrededor del eje de abscisas.

Capítulo 8

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

8.1. Matrices

Definición 8.1.1. *Se llama matriz a un conjunto ordenado de números perteneciente a un cuerpo $\mathbb{K}$ (que habitualmente será el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ o de los complejos $\mathbb{C}$), dispuestos en filas y columnas de forma rectangular. Se representa por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada también se suele representar por

$$A = (a_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

y se dice que es una matriz de dimensiones $m \times n$. El conjunto de las matrices $m \times n$ cuyos elementos pertenecen a un conjunto numérico $\mathbb{K}$ se designa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

En el caso particular en que $m = n$ diremos que la matriz $A = (a_{ij})$ es cuadrada de orden n, y al conjunto de todas ellas lo representaremos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A continuación vamos a recordar algunas definiciones básicas acerca de las matrices, las operaciones entre ellas y algunas propiedades elementales.

Definición 8.1.2. *Dos matrices son iguales si tienen las mismas dimensiones y coinciden elemento a elemento. Es decir, si* $(a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ \forall\, j = 1, \ldots, n$$

Definición 8.1.3. *En el conjunto* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *se define la suma de matrices de la siguiente manera:*

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Propiedades 8.1.4. *Sean* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

- *Conmutativa:* $A + B = B + A$
- *Asociativa:* $A + (B + C) = (A + B) + C$
- *Elemento neutro:* es la matriz $\mathbf{0}$, de dimensión $m \times n$, formada toda ella por ceros.
- *Elemento opuesto de una matriz* $A = (a_{ij})$*:* es la matriz $(-a_{ij})$.

Definición 8.1.5. *Si* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$, *se define el producto por un escalar como sigue:*

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}).$$

Propiedades 8.1.6. *Sean* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

- $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$

Hasta ahora hemos recordado operaciones de suma de matrices y producto por un escalar. Pero para poder multiplicar dos matrices entre sí, la definición debe hacerse con cuidado, pues han de cumplir una condición de compatibilidad: *el número de columnas de la primera ha de coincidir con el número de filas de la segunda.*

Definición 8.1.7. *Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Se llama matriz producto $A \cdot B$ a otra matriz $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, definida como sigue:*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad \forall\, i = 1, \ldots, m,\ \forall\, k = 1, \ldots, p.$$

Es decir, el elemento (i, k) de la matriz producto es el resultado de multiplicar escalarmente el vector formado por la fila i-ésima de la primera matriz, por el vector formado por la columna k-ésima de la segunda matriz.

El caso en que el producto de dos matrices adquiere más interés es cuando ambas matrices son cuadradas del mismo orden, pues entonces la matriz resultante es del mismo orden que las multiplicadas. Además, es posible intercambiar el orden en el que se multiplican las matrices y la operación sigue teniendo sentido, aunque en general, el resultado no sea el mismo. En general, para matrices cualesquiera, al no poder intercambiar el orden de multiplicación (no se cumple, en general, las condicione de compatibilidad), ni siquiera tiene sentido plantearse la conmutatividad del producto de matrices.

Definición 8.1.8. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se denomina* matriz traspuesta de A *a la matriz $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ que resulta de intercambiar filas por columnas en A.*

Ejemplo 8.1.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 9 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Propiedades 8.1.10. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

8.2. Matrices cuadradas

En esta sección vamos a centrarnos en el concepto de *matriz cuadrada* definido anteriormente. La importancia de este conjunto de matrices radica en que sobre ellas se pueden definir nuevos conceptos como los de *determinante* o *matriz inversa* que adquirirá relevancia en más adelante.

8.2.1. Propiedades del producto de matrices cuadradas

Como ya hemos comentado en la sección anterior, el producto de matrices es especialmente interesante dentro del conjunto de matrices cuadradas, pues podemos intercambiar el orden de multiplicación y se siguen verificando las condiciones de compatibilidad. Veamos a continuación algunas propiedades de estas matrices.

Propiedades 8.2.1. *Las siguientes propiedades se cumplen para matrices cuadradas de orden n, aunque alguna de ellas también son válidas siempre que sea posible efectuar los productos indicados.*

- *Asociativa:* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- *El elemento neutro es la siguiente matriz de orden n:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

  Es decir, para cualquier matriz cuadrada A de orden n, se verifica que $AI_n = I_n A = A$.

- *El producto de matrices no es conmutativo:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8.2.2. Determinantes, menores complementarios y adjuntos

Definición 8.2.2. *Sea A una matriz cuadrada de orden n:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se llama determinante *de A, y se representa por* $\det(A)$ *o por* $|A|$, *al número real o complejo (según sea la matriz real o compleja) definido por la siguiente expresión:*

$$det(A) = \sum (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} ... a_{ni_n}$$

donde $i_1 i_2 i_3 ... i_n$ *representa una permutación cualquiera de los números* $1, 2, 3, ..., n$ *y* σ *es el número de sus inversiones, extendiéndose el sumatorio a las* $n!$ *permutaciones de* $1, 2, 3..., n$.

Propiedades 8.2.3. *A continuación enumeraremos las propiedades más importantes de los determinantes.*

1. *Si la matriz* B *es la traspuesta de* A, *entonces* $det(B) = det(A)$.
2. *Si todos los elementos de una fila (o columna) de* A *son nulos, entonces* $det(A) = 0$.
3. *Si intercambiamos entre sí dos filas (columnas) de* A, *el determinante de la matriz* B *obtenida es el opuesto del determinante de* A, *es decir,* $det(B) = -det(A)$.
4. *El determinante de una matriz* A *con dos filas (columnas) iguales es nulo.*
5. *Si se multiplica una fila (columna) cualquiera de la matriz* A *por un número* λ, *el determinante de la matriz* B *obtenida es igual al producto de* λ *por el determinante de* A, *esto es,* $det(B) = \lambda det(A)$.
6. *Si dos filas (columnas) de una matriz son proporcionales, su determinante es nulo.*
7. *Si cada elemento de una fila (columna), por ejemplo la fila* p, *de la matriz* A *es de la forma* $a_{pj} = a'_{pj} + a''_{pj}$, *entonces el determinante de* A *es igual a la suma de los determinantes de dos matrices* B *y* C, *tales que la fila* p *de* B *está formada por los elementos* a'_{pj} *y la fila* p *de* C *está formada por los elementos* a''_{pj}. *Las restantes filas de ambas matrices son respectivamente iguales a las de* A.
8. *Si a la fila (columna)* p *de* A *se le suma otra fila (columna)* q *multiplicada por un número* λ, *el determinante de la matriz obtenida es igual al determinante de* A.
9. *Si una fila (columna) de* A *es combinación lineal de otras filas (columnas), entonces* $det(A) = 0$.

Es evidente que la definición de determinante es poco práctica a la hora de efectuar cálculos efectivos. Es por ello que vamos a introducir a continuación el concepto de *menor complementario*, el cual proporcionará una forma efectiva de calcular determinantes.

Definición 8.2.4. *Si en una matriz A de orden n se suprime una fila p y una columna q, resulta una matriz cuadrada de orden $n-1$, cuyo determinante se llama* menor complementario *del elemento a_{pq} que figura en la fila y en la columna suprimidas; lo representaremos por M_{pq}.*

Se llama adjunto *del elemento a_{pq}, y lo representamos por A_{pq}, al número*

$$A_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}.$$

Teorema 8.2.5. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n.*

1. *El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (resp. columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos. Es decir, supuesta la fila p, el determinante de la matriz A es:*

$$det(A) = a_{p1}A_{p1} + a_{p2}A_{p2} + ... + a_{pn}A_{pn} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}A_{pj}.$$

2. *La suma de los productos de los elementos de una fila (resp. columna) por los adjuntos de los elementos respectivos de otra es igual a cero, es decir:*

$$a_{p1}A_{q1} + a_{p2}A_{q2} + ... + a_{pn}A_{qn} = 0 \quad para \quad p \neq q.$$

Teorema 8.2.6. *Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Se verifica:*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

8.2.3. Inversa de una matriz

Definición 8.2.7. *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que la matriz A^{-1}, cuadrada de orden n, es la* matriz inversa *de A si se verifica que*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_N,$$

donde I es la matriz unidad de orden n.

En la definición anterior, se habla de *la* matriz inversa, sugiriéndose así la unicidad de ésta. En efecto, la proposición siguiente confirma esta sugerencia.

Proposición 8.2.8. *La inversa de una matriz, si existe, es única.*

Nota 8.2.9. *Si una matriz A es invertible, entonces su inversa A^{-1} también es invertible y además $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Teorema 8.2.10. *La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero. En tal caso, se verifica que:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)^t$$

donde $Adj(A)$ es la matriz formada por los adjuntos de los elementos de la matriz A.

8.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 8.3.1. *Una ecuación lineal sobre $\mathbb{K}$ en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma:*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

donde $a_i, b \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Si $b = 0$, diremos además que la ecuación es homogénea.

Definición 8.3.2. *Una solución de una ecuación lineal sobre $\mathbb{K}$*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

es cualquier elemento $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que:

$$a_1 \alpha_1 + \cdots + a_n \alpha_n = b.$$

Esta última expresión también se suele notar como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = b.$$

Definición 8.3.3. *Un sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{K}$ en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es una colección finita de ecuaciones lineales en las variables $x_1, \ldots, x_n$; esto es,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Este sistema también se notará matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si se tiene que $b_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, diremos que el sistema es homogéneo.

Definición 8.3.4. *Una solución de un sistema de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{K}$*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

es cualquier elemento $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 & + & \dots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 & + & \dots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m \end{cases}$$

Esta expresión también se suele notar por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \ 1 \leq i \leq m.$$

8.4. Regla de Cramer y Teorema de Rouché-Fröbenius

En esta última sección estudiaremos cuándo es posible encontrar una solución de un sistema de ecuaciones lineales, cuándo esta solución es única y qué forma tiene dicha solución.

Notas 8.4.1. *A partir de ahora utilizaremos la siguiente notación:*

1. *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, representaremos por $|A|$ al determinante de A.*

2. *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:*

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denominará matriz de coeficientes del sistema S.

Definición 8.4.2. *Un sistema (S) de n ecuaciones con n incógnitas, diremos que es de un* sistema de Cramer *si $|A| \neq 0$.*

Teorema 8.4.3. *Sea (S) un sistema de Cramer. Se verifica:*

1. *(S) tiene solución única.*
2. *La única solución $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de S viene dada por:*

$$\alpha_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, \alpha_n = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Demostración. Destacamos esta demostración por ser constructiva. El sistema (S) se puede escribir, usando la notación matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Pero como $|A| \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}, luego tenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

lo que prueba que (S) tiene solución única. Desarrollando esta expresión se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

o lo que es lo mismo,

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|},$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|},$$

con lo que el teorema queda probado. □

Definición 8.4.4. *Sea $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$.*

1. *Un menor de A es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A. Un menor de orden r es el determinante que resulta de suprimir en A "$n-r$" filas y "$m-r$" columnas.*

2. *El* rango de A, $\operatorname{rang}(A)$, *es el máximo de los órdenes de los menores no nulos de A.*

Notas 8.4.5. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$.*

1. *El número máximo de filas de A linealmente independientes es igual al* $\operatorname{rang}(A)$.

2. $\operatorname{rang}(A) = m \Leftrightarrow$ *todas las filas de A son linealmente independientes.*

3. *Supongamos que* $n = m$.

   a) $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ *todas las filas de* A *son linealmente independientes.*

   b) $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ *las filas de* A *forman una base de* $\mathbb{K}^n$.

4. *Sea* B *la submatriz de* A *formada por las "*r*" primeras filas de* A. *Entonces,* $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \Leftrightarrow$ *las filas* $\mathbf{a_{r+1}}, \ldots, \mathbf{a_m}$ *dependen linealmente de las "*r*" primeras.*

5. *Sea* B *la submatriz de* A *formada por las* r *primeras filas. Si* $\text{rang}(B) = r$ *y el rango de las "*$m - r$*" matrices que se obtienen de* B *añadiéndole cada una de las restantes "*$m - r$*'" filas de* A *es* r, *entonces* $rang(A) = r$.

En la práctica calcularemos el rango de una matriz utilizando el método del Orlado, que se basa en las propiedades 4 y 5 de la nota anterior.

Teorema 8.4.6 (Rouché-Fröbenius)**.** *Consideremos el sistema:*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

que escribiremos matricialmente como $A \cdot X = B$, *con la notación ya conocida. Representaremos por* $(A|B)$ *a la matriz obtenida de* A *añadiéndole* B *como última columna. En estas condiciones:*

$$A \cdot X = B \text{ tiene solución } \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|B).$$

Ejercicios y Problemas

1.- Hallar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

2.- a) Demostrar que el conjunto de matrices de la forma $M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(a \in \mathbb{R}^+)$ forman un grupo para el producto.

b) Idem. $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.- Calcular A^3 y B^3, siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \cos\alpha & 0 & -1 \\ \operatorname{sen}\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$.

4.- Calcular A^n en los casos: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5.- Hallar las matrices que conmutan con A en los casos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.- a) Hallar las matrices A, cuadradas de orden 2, tales que $A^2 = \Theta$.

b) Idem $A^2 = A$. (A dichas matrices se les llama *idempotentes*).

7.- Sea A la matriz cuadrada de orden n definida por: $a_{ij} = \begin{cases} a & si \quad i = j \\ b & si \quad i \neq j \end{cases}$. Hallar a y b para que se verifique que $A^2 = I$.

8.- Sin desarrollar, demostrar *a)* $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$, *b)* $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ 0a & b & c \end{vmatrix}$.

9.- Resolver las ecuaciones: *a)* $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *b)* $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$.

10.- Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ -1 & x & 1 & ... & 1 \\ -1 & -1 & x & ... & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -1 & -1 & ... & x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & a & a & ... & a \\ a & x & a & ... & a \\ a & a & x & ... & a \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a & a & a & ... & x \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$.

11.- Hallar las matrices inversas, si existen, de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & i & 0 \\ 0 & 1 & 2-i \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

12.- Hallar el rango de las matrices según los valores del parámetro (si lo hay):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 3 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

13.- Poner un ejemplo, en cada caso, de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea: a) Incompatible. b) Compatible indeterminado. c) Compatible determinado.

14.- Escribir los siguientes sistemas en forma matricial, estudiar si tienen solución, y resolverlos, en su caso, por la regla de Cramer y el método de triangulación de

Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=2 \\ x+4y+9z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x-2y+z=0 \\ 3x+y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+z-t=0 \\ -x+2y+z-2t=1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

15.- Estudiar los siguientes sistemas, según los valores de los parámetros, y resolverlos en caso de compatibilidad:

$$\begin{cases} (a+1)x+y+z=a+1 \\ x+(a+1)y+z=a+3 \\ x+y+(a+1)z=-2a-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x-3y+4z=7 \\ 5x-(a+1)y+7z=8+a \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+y+z=b^2 \\ x+y+az=b \\ x+y+2az=2 \end{cases}$$

Capítulo 9

Espacios Vectoriales

9.1. Espacios Numéricos

Notas 9.1.1.

(1) En lo que sigue, $\mathbb{K} = \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$, *donde* $\mathbb{Q}$ *es el conjunto de los números racionales,* $\mathbb{R}$ *es el conjunto de los números reales y* $\mathbb{C}$ *es el conjunto de los números complejos, ya estudiados anteriormente.*

(2) Recordemos que un conjunto $\mathbb{K}$ *y dos operaciones internas: '*$+$*' y '*$\cdot$*' (suma y producto), verificando:*

(2.1) $(\mathbb{K}, +)$ *es un grupo abeliano.*

(2.2) $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ *es un grupo abeliano.*

(2.3) Propiedad distributiva: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{K} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Definición 9.1.2. *La estructura definida por* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, *verificando las anteriores propiedades, se denomina CUERPO.*

Definición 9.1.3. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo. Un* **espacio vectorial** *sobre* $\mathbb{K}$ *consta de un conjunto no vacío* V, *una ley de composición interna sobre* V, *'*$+$*', y una aplicación de* $\mathbb{K}$ *por* V *en* V, *'*$\cdot$*', (ley externa), verificando las siguientes propiedades:*

(1) $(V, +)$ *es un grupo abeliano, esto es, para todo* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

(1.1) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$. *(Conmutativa).*

(1.2) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$. *(Asociativa).*

(1.3) Existe $\mathbf{0}\in V$ *tal que para todo* $\mathbf{u}\in V$, $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. *(Elemento neutro).*

(1.4) Para todo $\mathbf{u}\in V$, *existe* $\mathbf{u}'\in V$ *tal que* $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$ *(opuesto de* $\mathbf{u}$*).*

(2) Para todo $\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in V$ *y para todo* $\alpha,\ \beta\in\mathbb{K}$,

(2.1) $\alpha\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\cdot\mathbf{u}+\alpha\cdot\mathbf{v}$.

(2.2) $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{u}=\alpha\cdot\mathbf{u}+\beta\cdot\mathbf{u}$.

(2.3) $\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{u})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{u}$.

(2.4) $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Notas 9.1.4.

(1) Los elementos de V *se denominarán vectores y los de* $\mathbb{K}$ *escalares.*

(2) El elemento $\mathbf{u}'$ *cuya existencia asegura (1.4) es único y se notará por* $-\mathbf{u}$.

Ejemplos 9.1.5. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo. Son espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$*:*

- $M(n\times m,\mathbb{K})$. *(Conjunto de las matrices con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *con* n *filas y* m *columnas).*
- *Un conjunto con un único elemento* $\{\mathbf{0}\}$ *es un espacio vectorial que llamaremos espacio vectorial trivial.*
- *El conjunto* $\mathbb{K}[X]$ *de los polinomios en* X*, de grado menor o igual que* n*, con coeficientes en* $\mathbb{K}$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

Proposición 9.1.6. *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Para todo* $\mathbf{u},\ \mathbf{v}\in V$ *y todo* $\alpha,\ \beta\in\mathbb{K}$ *se verifica que:*

(1) $\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(2) $0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

(3) $\alpha\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})=\alpha\cdot\mathbf{u}-\alpha\cdot\mathbf{v}$.

(4) $(\alpha-\beta)\cdot\mathbf{u}=\alpha\cdot\mathbf{u}-\beta\cdot\mathbf{u}$.

(5) $(-\alpha)\cdot\mathbf{u}=-\alpha\cdot\mathbf{u}$.

Demostración

(1) Sea $\mathbf{u} \in V$, se verifica $\alpha \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{0}$, luego $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(2) Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha + 0) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(3) $\alpha \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \alpha \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot ((\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v}) = \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{u} \quad \Rightarrow \alpha \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} - \alpha \cdot \mathbf{v}$.

(4) $(\alpha - \beta) \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u} = (\alpha - \beta + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} \Rightarrow (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} - \beta \cdot \mathbf{u}$.

(5) $(-\alpha) \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{u} = (-\alpha + \alpha) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Veremos más adelante otros ejemplos importantes de espacios vectoriales:

Definición 9.1.7. *Llamaremos espacio numérico sobre* $\mathbb{K}$*, de dimensión* n*, al conjunto:*

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}$$

En $\mathbb{K}^n$ *definimos las siguientes operaciones:*

(1) $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$.

(2) $a \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (a \cdot a_1, \ldots, a \cdot a_n)$.

Nota 9.1.8. *Los elementos de* $\mathbb{K}^n$ *se denominan vectores y los notaremos por* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$.

Proposición 9.1.9. $\mathbb{K}^n$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

Demostración:

Se verifican claramente las propiedades de espacio vectorial. Nos limitamos a enumerarlas:

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

(2) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, donde $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

(3) $\forall\ \mathbf{u} \in \mathbb{K}^n\ \exists\ \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n\ \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces $\mathbf{v} = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

(4) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

(5) $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$.

(6) $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$.

(7) $a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{u}$.

(8) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

9.2. Subespacios vectoriales

Definición 9.2.1. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que $L \subset V$ $(L \neq \emptyset)$ es un subespacio vectorial (o una variedad lineal) de V sobre $\mathbb{K}$ si L, con las leyes de composición interna y externa de V, es un espacio vectorial.*

Proposición 9.2.2. *Sea $L \subset V$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es un subespacio vectorial de V.

(2) (a) $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in L \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in L$.

(b) $\mathbf{u} \in L,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{u} \in L$.

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$, es $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in L$.

Proposición 9.2.3. *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales homogénas sobre $\mathbb{K}$,*

$$(*)\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + \cdots + & a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + \cdots + & a_{mn} \cdot x_n & = & 0 \end{cases}$$

El conjunto de las soluciones del sistema homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

Demostración:

Sea $L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \mid \mathbf{v} \text{ es una solución de } (*)\}$. Tenemos que demostrar:

(1) $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in L \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in L$.

(2) $\mathbf{v} \in L,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v} \in L$.

Pongamos el sistema en forma matricial : $A \cdot X = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

(1) $A \cdot (V + W) = A \cdot V + A \cdot W = 0 + 0 = 0$

(2) $A \cdot (\alpha \cdot V) = \alpha \cdot (A \cdot V) = \alpha \cdot 0 = 0$.

9.3. Dependencia lineal

Definición 9.3.1. *Diremos que* $\mathbf{v} \in V$ *es combinación lineal de* $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ *si existen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tales que:*

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v_n}$$

Ejemplos 9.3.2.

(1) $\mathbf{0}$ *es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.*

(2) $\mathbf{u}$ *es combinación lineal de cualquier conjunto que contenga a* $\mathbf{u}$.

(3) En $\mathbb{K}[X]$ *todo polinomio de grado menor o igual a* n *es combinación lineal de los polinomios* $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.

Proposición 9.3.3. *Si* $\mathbf{v}$ *es combinación lineal de* $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *y cada* $\mathbf{v_i}$ *es, a su vez, combinación lineal de* $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}$, *entonces* $\mathbf{v}$ *es combinación lineal de* $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_r}$.

Demostración. Se tiene:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v_i}, \quad \mathbf{v_i} = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} \mathbf{u_j}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} \mathbf{u_j}) = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij}) \mathbf{u_j}.$$

□

Definición 9.3.4. *Sea* $A \subset V$. *Se llama subespacio vectorial engendrado por* A, *y se designa por* $L(A)$, *al conjunto de todas las combinaciones lineales de un número finito de elementos de* A. *Si* $A = \emptyset$, *se define* $L(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Proposición 9.3.5.

(1) $L(A)$ *es un subespacio vectorial de* V.

(2) $L(A) \supset A$.

(3) Si $A \subset B \Rightarrow L(A) \subset L(B)$.

(4) Si A es un subespacio vectorial de V, entonces $L(A) = A$.

(5) $L(L(A)) = L(A)$.

Definición 9.3.6. *Diremos que V es un espacio vectorial de dimensión finita si existe un número finito de elementos de V, $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$, tales que:*

$$V = L(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$$

Un tal conjunto diremos que es un sistema de generadores de V.

Ejemplos 9.3.7.

(1) $\mathbb{K}^n$ es de dimensión finita.

(2) $\mathbb{K}[X]$ (polinomios en la indeterminada X con coeficientes en $\mathbb{K}$) no es de dimensión finita.

(3) El conjunto de los polinomios en la indeterminada X, de grado menor o igual que n, con coeficientes en $\mathbb{K}$, sí es un espacio vectorial de dimensión finita.

Definición 9.3.8. *Sean $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n} \in V$.*

(1) $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ son linealmente dependientes si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,no todos nulos, tales que:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u_n} = \mathbf{0}$$

(2) $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ son linealmente independientes si:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u_n} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Ejemplos 9.3.9.

(1) Si $\mathbf{0} \in \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$, entonces $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ son linealmente dependientes

(2) Si a un conjunto de vectores linealmente dependientes se le añaden cualesquiera otros vectores, resulta un conjunto de vectores linealmente dependientes.

(3) Cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Proposición 9.3.10. *Si* $\mathbf{v}$ *es combinación lineal de* $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$*, entonces el conjunto* $\{\mathbf{v}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *es linealmente dependiente.*

Demostración. Por hipótesis existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v_n}$$

Entonces:

$$(-1)\mathbf{v} + \alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

y no todos los coeficientes son nulos, porque el primero es -1. □

Proposición 9.3.11. *Si los vectores* $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ *son linealmente dependientes, alguno de ellos es combinación lineal de los demás.*

Demostración. Por hipótesis existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

Si es $\alpha_i \neq 0$, existe $\frac{1}{\alpha_i}$ y entonces:

$$\mathbf{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \cdot \mathbf{v_1} - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \cdot \mathbf{v_{i-1}} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cdot \mathbf{v_{i+1}} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \cdot \mathbf{v_n}$$

Luego $\mathbf{v_i}$ depende linealmente de los demás vectores del conjunto. □

9.4. Bases y dimensión

Definición 9.4.1. *Decimos que* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\} \subset V$ *es una base de* V *si se verifica:*

(1) $V = L\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$*. Esto es,* $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ *es un sistema de generadores de* V*.*

(2) $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ *son linealmente independientes.*

Ejemplo 9.4.2. $\{(1,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,1)\}$ *es una base de* $\mathbb{K}^n$.

Teorema 9.4.3. *Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.*

Demostración. Por ser V de dimensión finita posee un sistema finito de generadores $\{\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n}\}$. Si este conjunto es linealmente independiente ya es una base, y si es linealmente dependiente, por la proposición 9.3.11, uno de los $\mathbf{u_i}$ es combinación lineal de los demás: supongamos que se trata de $\mathbf{u_1}$ (esto no resta generalidad a la demostración). Entonces, $\{\mathbf{u_2},\mathbf{u_3},\ldots,\mathbf{u_n}\}$ es un sistema de generadores de V. Si este conjunto es linealmente independiente es una base, y si no, uno de sus vectores depende de los demás. Como el número de los $\mathbf{u_i}$ es finito, repitiendo el proceso, o se encuentra una base o se agotan los $\mathbf{u_i}$, y esto último es imposible por tratarse de un sistema de generadores. □

Teorema 9.4.4. *En un espacio vectorial de dimensión finita todas las bases tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}=\{\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n}\}$ y $\mathcal{B}'=\{\mathbf{v_1},\ldots,\mathbf{v_m}\}$ dos bases de V. Tomemos $\mathbf{u_1}\in\mathcal{B}$, Por ser $\mathcal{B}'$ un sistema de generadores $\mathbf{u_1}=x_1\mathbf{v_1}+\cdots+x_m\mathbf{v_m}$ no siendo 0 todas las x_i, puesto que $\mathbf{u_1}\neq\mathbf{0}$. Pongamos $x_1\neq 0$, sin que esto reste generalidad a la demostración. Entonces podemos despejar $\mathbf{v_1}$:

$$\mathbf{v_1}=\frac{1}{x_1}\mathbf{u_1}-\frac{x_2}{x_1}\mathbf{v_2}-\cdots-\frac{x_m}{x_1}\mathbf{v_m}$$

Consideremos ahora el conjunto $\{\mathbf{u_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_m}\}$. Por la proposición 9.3.3, este conjunto es un sistema de generadores de V, por lo que $\mathbf{u_2}=y_1\mathbf{u_1}+y_2\mathbf{v_2}+\cdots+y_m\mathbf{v_m}$, con algún $y_i\neq 0,\quad i\geq 2$, ya que si fueran todos nulos, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ serían linealmente dependientes, y no es así porque forman parte de una base. Entonces, como antes, podemos despejar una de las $\mathbf{v_i}$ y así resulta que $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{v_3},\ldots,\mathbf{v_m}\}$ es un sistema de generadores.
Siguiendo con este intercambio, iremos sustituyendo cada vez una $\mathbf{v}$ por una $\mathbf{u}$, resultando siempre un nuevo sistema de generadores de V. Al final no pueden quedar vectores en $\mathcal{B}$, una vez agotados los $\mathbf{v}$, porque si así fuese, los $\mathbf{u_i}$ que quedasen serían combinación lineal del último sistema de generadores, formado por $\mathbf{u}$, y esto es imposible por ser $\mathcal{B}$ una base. Así pues resulta que $n\leq m$.

Si repitiésemos ahora el proceso, pero al revés, es decir, sustituyendo cada $\mathbf{u}$ por un $\mathbf{v}$, resultaría que $m \leq n$. Luego $m = n$. □

Definición 9.4.5. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Se llama dimensión de V, dim(V), al número de elementos de cualquier base de V. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, convenimos en que tiene dimensión cero.*

Ejemplo 9.4.6. *dim($\mathbb{K}^n$) = n.*

Corolario 9.4.7. *Sea V un espacio vectorial con dim(V) = n.*

(1) Todo conjunto de n vectores linealmente independiente es una base.

(2) Todo conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.

(3) Todo sistema de generadores de V tiene al menos n elementos.

(4) Todo sistema de generadores con n elementos es una base.

(5) Todo subespacio de V es de dimensión finita y tiene dimensión menor o igual que n.

(6) Toda base de un subespacio de V puede ampliarse a una base de V.

Teorema 9.4.8. *Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ es una base de V, entonces para cada $\mathbf{v} \in V$ existe un único $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que:*

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u_n}$$

Este elemento de $\mathbb{K}^n$ se denomina coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto de $\mathcal{B}$ y lo notaremos por:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Demostración:

Sea $\mathbf{v} \in V$, y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ una base de V. Entonces $\exists \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{u_n}$$

Supongamos que existen $\beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\mathbf{v} = \beta_1 \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{u_n}$$

entonces, restando, resulta $\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \mathbf{u_1} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \mathbf{u_n}$, y como $\mathcal{B}$ es una base, todos los paréntesis son nulos. Luego

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$$

Ejercicios y Problemas

1.- Hallar $t \in \mathbb{R}$ para que el vector $\vec{x} = (3, 8, t)$ pertenezca al subespacio engendrado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, 3, -1)$.

2.- Determinar a y b para que el vector $(1, 4, a, b)$ sea combinación lineal de $(1, 2, -1, -2)$ y de $(0, 1, 2, 1)$.

3.- Demostrar que los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$ forman una base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, y encontrar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de dicha base.

4.- Determinar qué conjuntos son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^3. + .\cdot)$:

$$A = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}, \quad B = \{(x, y, z) : x + 2y + z = 1\},$$

$$C = \{(x, y, z) : x - y = 0, x - z = 0, \}, \quad D = \{(x, y, z) : x - y + z = 0, y + z = 1\},$$

$$E = \{(x, y, z) : x = 0, y = z\}, \quad F = \{(x, y, z) : x \cdot y = 0\}$$

5.- Demostrar que el conjunto $E = \{(a, 0, b, a)\,,\, a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. En caso afirmativo, hállese una base del mismos.

6.- a) Probar que los vectores $\vec{u} = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $\vec{v} = (7, 1 + 2\sqrt{2})$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ pero linealmente independientes sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$.

b) Probar que los vectores de $\mathbb{C}^2$: $\vec{u} = (1 - i, 1)$, $\vec{v} = (2, -1 + i)$ son linealmente dependientes sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ pero linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

7.- Sea $P_3[x]$ el Espacio vectorial de los polinomios en la indeterminada x de grado menor o igual que 3.

Probar que si $p(x)$ es un polinomio de grado 3, entonces $\left\{p(x),\, p^{'}(x),\, p^{''}(x),\, p^{'''}(x)\right\}$ es una base.

Tómese $p(x) = x^3 - 3x$, y hállense las coordenadas de $q(x) = x^3 + x - 2$ respecto de dicha base.

8.- Sean los conjuntos:

$$F[x] = \left\{p(x) \in P_3[x] \,:\, p(0) + p^{'}(0) = 0\right\} \;,\; G[x] = \left\{p(x) \in P_3[x] \,:\, p^{''}(x) = 0\right\}.$$

Demostrar que $F[x]$ y $G[x]$ son subespacios vectoriales de $P_3[x]$, y encontrar sendas bases para cada uno de ellos.

Capítulo 10

Aplicaciones lineales

10.1. Definiciones y propiedades

Nota 10.1.1. *En lo que sigue V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.*

Definición 10.1.2. *Una aplicación $f : V \longrightarrow W$ diremos que es lineal si para todo $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ y todo $\alpha \in K$ se tiene que:*

(1) $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$.

(2) $f(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot f(\mathbf{v})$.

Ejemplos 10.1.3. *(1) La aplicación $f_0 : V \longrightarrow W$, definida por $f_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in V$, es lineal.*

(2) La aplicación identidad de V en V, $1_V : V \longrightarrow V$, definida por $1_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$, es lineal.

Definición 10.1.4. *(1) $Hom(V,W) = \{f :\ f$ aplicación lineal de V en $W\}$.*

Si $f \in Hom(V,W)$, diremos que f es un homomorfismo de V en W.

(2) $End(V) = \{f :\ f$ aplicación lineal de V en $V\}$. Si $f \in End(V)$, diremos que f es un endomorfismo de V.

(3) $f : V \longrightarrow W$ *es un isomorfismo,* $f : V \cong W$*, si*

(3.1) f *es lineal.*

(3.2) f *es biyectiva.*

(4) Si existe un isomorfismo de V *en* W*, escribiremos* $V \cong W$*.*

(5) Un automorfismo de V *es un isomorfismo de* V *en* V*.*

Propiedades 10.1.5. *Sea* $f \in Hom(V, W)$*.*

(1) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$*.*

(2) $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$*.*

(3) $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$*.*

Demostración. (1) Si $\mathbf{v} \in V$, es $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{0}) \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
(2) $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) + f(-\mathbf{v}) \Rightarrow f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$
(3) $f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = f(\mathbf{v} + (-\mathbf{w})) = f(\mathbf{v}) + f(-\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})$. □

Definición 10.1.6. *Sea* $f \in Hom(V, W)$*. Definimos*

(1) $Img(f) = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$ *; este conjunto se llama imagen de* f*.*

(2) $Ker(f) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$*; este conjunto se llama núcleo de* f*.*

(3) Si $A \subset V$, $f(A) = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in A\}$*. Este conjunto se llama imagen de* A*. Obsérvese que* $Img(f) = f(V)$*.*

(4) Si $B \subset W$, $f^{-1}(B) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) \in B\}$*. Este conjunto se llama imagen recíproca de* B *y no debe confundirse con la aplicación* f^{-1}*, que sólo existe cuando* f *es biyectiva. Obsérvese que* $Ker(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$

Proposición 10.1.7. *Sea* $f \in Hom(V, W)$

(1) $Img(f)$ *es un subespacio vectorial de* W*.*

(2) $Ker(f)$ *es un subespacio vectorial de* V*.*

Demostración. (1) Sean $\mathbf{v}', \mathbf{w}' \in Img(f)$, entonces $\exists \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ tales que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}', f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$.

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \in Img(f)$$

Si $\alpha \in K$

$$\alpha \cdot \mathbf{v}' = \alpha \cdot f(\mathbf{v}) = f(\alpha \cdot \mathbf{v}) \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v}' \in Img(f).$$

(2) Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in Ker(f)$, $\alpha \in K$

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in Ker(f)$$

$$f(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v} \in Ker(f).$$

□

Proposición 10.1.8. *Sea $f \in Hom(V, W)$*

(1) f inyectiva $\iff Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(2) Si $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ son linealmente dependientes, entonces $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ son linealmente dependientes.

(3) Si $f : V \cong W$ es un isomorfismo, entonces $f^{-1} : W \cong V$ es un isomorfismo.

Demostración. (1) $\Rightarrow$) Sea $\mathbf{v} \in Ker(f)$, entonces $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
$\Leftarrow$) Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ son tales que $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w})$ es

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in Ker(f)$$

de donde $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} \Rightarrow f$ es inyectiva.
(2) Si $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$ son linealmente dependientes, $\Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, no todos nulos, tales que $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0}$. Por tanto, $f(\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_r \cdot \mathbf{v}_r) = \alpha_1 \cdot f(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_r \cdot f(\mathbf{v}_r) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, luego $f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)$ son linealmente dependientes.
(3) Como f es biyectiva, f^{-1} también es biyectiva. Luego sólo habrá que probar que f^{-1} es lineal. Sean $\mathbf{v}', \mathbf{w}' \in W$, y sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ los únicos vectores tales que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$, $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$. Como $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$ es

$$f^{-1}(\mathbf{v}' + \mathbf{w}') = \mathbf{v} + \mathbf{w} = f^{-1}(\mathbf{v}') + f^{-1}(\mathbf{w}')$$

De otro lado, si $\alpha \in K$, como $f(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot f(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{v}'$ es

$$f^{-1}(\alpha \cdot \mathbf{v}') = \alpha \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot f^{-1}(\mathbf{v}')$$

□

Proposición 10.1.9. *Sea V' un espacio vectorial sobre K*

$$f \in Hom(V,W),\ g \in Hom(W,V') \Rightarrow g \circ f \in Hom(V,V')$$

Demostración. Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\alpha \in K$. Se verifica que:

$$(g\circ f)(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = g(f(\mathbf{v}+\mathbf{w})) = g(f(\mathbf{v})+f(\mathbf{w})) = g(f(\mathbf{v}))+g(f(\mathbf{w})) = (g\circ f)(\mathbf{v})+(g\circ f)(\mathbf{w})$$

$$(g \circ f)(\alpha \cdot \mathbf{v}) = g(f(\alpha \cdot \mathbf{v})) = g(\alpha \cdot f(\mathbf{v})) = \alpha \cdot (g \circ f)(\mathbf{v})$$

□

Teorema 10.1.10. Teorema de la dimensión *Sea $f \in Hom(V,W)$. Entonces*

$$dim(V) = dim(Img(f)) + dim(Ker(f))$$

10.2. Representación matricial de una aplicación lineal

Nota 10.2.1. *Sean V, V' y V'' espacios vectoriales sobre K. Sean $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ base de V, $\mathcal{B}' = \{\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \cdots, \vec{u'}_m\}$ base de V' y $\mathcal{B}'' = \{\vec{u''}_1, \vec{u''}_2, \cdots, \vec{u''}_p\}$ base de V''.*

Ya que toda aplicación lineal, $f \in Hom(V,V')$, está determinada por sus valores en los elementos de $\mathcal{B}$. Más concretamente, se tiene la siguiente

Proposición 10.2.2. *Sean $f \in Hom(V,V')$,*

$$f(\mathbf{u_i}) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot \mathbf{u'_j}, \quad 1 \le i \le n \quad y \quad M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sean $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}' \in V'$, $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $\mathbf{v}'_{\mathcal{B}'} = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_m)$. Se tiene que:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}' \Longleftrightarrow (x'_1, x'_2, \cdots, x'_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

donde $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ es la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. La ecuación

$$(x'_1, x'_2, \cdots, x'_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

se denomina ecuación de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Proposición 10.2.3. *Sean $f \in Hom(V, V')$ y $g \in Hom(V', V'')$. Se tiene que:*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)$$

Definición 10.2.4. *Sean $A, B \in M(n \times n, K)$. Diremos que A y B son semejantes, $A \sim B$, si*

$$\exists P \in M(n \times n, K) \mid |A| \neq 0 \mid A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

Proposición 10.2.5. *La relación de semejanza, $\sim$, es una relación de equivalencia en $M(n \times n, K)$.*

10.3. El problema de la clasificación lineal. Autovectores y autovalores

Se trata de encontrar procedimientos para resolver las siguientes cuestiones:

(1) Dada $A \in M(n \times n, K)$ encontrar $B \in M(n \times n, K)$ tal que:

(1.1) $A \sim B$.

(1.2) B sea de la forma "más sencilla" posible.

(2) Dado $f \in End(V)$, encontrar una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ sea de la forma "más sencilla" posible.

Proposición 10.3.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre K. Sean $A, A' \in M(n \times n, K)$. Son equivalentes:*

(1) $A \sim A'$.

(2) Existe $f \in End(V)$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de V tales que $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ y $M_{\mathcal{B}'}(f) = A'$.

En virtud de esta proposición el problema: "dada una matriz $A \in M(n \times n, K)$, encontrar una A' semejante a A con la forma más sencilla posible", equivale al problema: "dado un endomorfismo f de V de matriz A respecto de una base $\mathcal{B}$ de V, encontrar otra base $\mathcal{B}'$ en la cual la matriz de f sea lo más sencilla posible".

Nota 10.3.2. *A partir de ahora V será un espacio vectorial sobre K de dimensión n y $f \in End(V)$.*

Definición 10.3.3. *Sea* $\mathbf{a} \in V$ *con* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. *Diremos que* $\mathbf{a}$ *es un autovector de* f *si*

$$\exists \alpha \in K \mid f(\mathbf{a}) = \alpha \cdot \mathbf{a}$$

Proposición 10.3.4. *Sean* $\mathcal{B}$ *una base de* V *y* $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. *Son equivalentes:*

(1) $\mathbf{a}$ *es un autovector de* f.

(2) Existe $\alpha \in K$ *tal que* $\mathbf{a}_{\mathcal{B}}$ *es solución del sistema*

$$(x_1, \ldots, x_n)\ (\alpha \cdot I - A) = (0, \ldots, 0)$$

Demostración. Sea $\mathbf{a}_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$.
$\mathbf{a}$ es un autovector de $f \iff \exists \alpha \in K$ tal que $f(\mathbf{a}) = \alpha \cdot \mathbf{a} \iff \exists \alpha \in K$ tal que $(a_1, \ldots, a_n) \cdot A = \alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) \iff \exists \alpha \in K$ tal que $(a_1, \ldots, a_n) \cdot (\alpha \cdot I - A) = (0, \ldots, 0) \iff \exists \alpha \in K$ tal que $\mathbf{a}_{\mathcal{B}}$ es solución del sistema $(x_1, \ldots, x_n)(\alpha \cdot I - A) = (0, \ldots, 0)$. □

Nota 10.3.5. *Por el Teorema de Rouché-Fröbenius sabemos que el sistema*

$$(x_1, \ldots, x_n)\ (\alpha \cdot I - A) = (0, \ldots, 0)$$

tiene solución distinta de la trivial si, y sólo si, $|\alpha \cdot I - A| = 0$. *Así pues, los valores de* $\alpha \in K$ *para los cuales se obtienen autovectores de* f *son las soluciones de la ecuación* $|\alpha \cdot I - A| = 0$.

Definición 10.3.6. *El polinomio* $|\lambda \cdot I - A|$ *se denomina polinomio característico de* f *respecto de la base* $\mathcal{B}$. *La ecuación* $|\lambda \cdot I - A| = 0$ *se denomina ecuación característica de* f *respecto de la base* $\mathcal{B}$.

Teorema 10.3.7. *El polinomio característico de* f *no depende de la base elegida.*

Definición 10.3.8. *Las soluciones de la ecuación característica de* f *se denominan autovalores de* f.

Corolario 10.3.9. *Sean* $A, B \in M(n \times n, K)$.
Si $A \sim B$, *entonces* A *y* B *tienen el mismo polinomio característico.*

10.4. Endomorfismos diagonalizables

Definición 10.4.1. *Sea $f \in End(V)$. Diremos que f es diagonalizable si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(f)$ es diagonal.*

Teorema 10.4.2. *Son equivalentes:*

(1) f es diagonalizable.

(2) V posee una base formada por autovectores de f.

Si éste es el caso, y si $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ es una base de V respecto de la cual la matriz de f es diagonal, a saber

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son los autovalores de f.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ una base de V, respecto de la cual la matriz de f es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u_1}) & = & \lambda_1 \cdot \mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) & = & \lambda_2 \cdot \mathbf{u_2} \\ \vdots & & \ddots \\ f(\mathbf{u_n}) & = & \lambda_n \cdot \mathbf{u_n} \end{array}$$

y así, $\{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ son autovectores respecto de f. Además, como la ecuación característica de f no depende de la base respecto de la cual se tome, será:

$$\left| \lambda I - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & & & \\ & \lambda - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

y así, los autovalores de f son $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ una base formada por autovectores. Se tiene entonces que

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u_1}) & = & \lambda_1 \cdot \mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) & = & \lambda_2 \cdot \mathbf{u_2} \\ & \vdots & \ddots \\ f(\mathbf{u_n}) & = & \lambda_n \cdot \mathbf{u_n} \end{array}$$

y así, la matriz de f respecto de esa base es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Esto prueba el teorema. □

Vamos a estudiar ahora una condición suficiente para que un endomorfismo sea diagonalizable. El estudio de una condición necesaria se hará más adelante.

Proposición 10.4.3. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ autovalores distintos de f, y $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_r} \in V - \{\mathbf{0}\}$ tales que $f(\mathbf{a_i}) = \lambda_i \cdot \mathbf{a_i}$, ($\mathbf{a_i}$ autovector correspondiente al autovalor λ_i). Entonces, $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_r}$ son linealmente independientes.*

Teorema 10.4.4. *Si f posee n autovalores distintos en K, entonces f es diagonalizable.*

Ejercicios y Problemas

1.- Decir si son lineales las siguientes aplicaciones:

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z)=(2x,x+y,3z)$, *b)* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\ f(x,y)=(2x+y,x-2y,y)$

c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\ f(x,y)=(x+1,x+y,0)$, *d)* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:\ f(x,y,z)=(x+y+z,1)$,

e) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2:\ f(x,y,z,t)=(x-y,2z+t)$, *f)* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4:\ f(x,y,z)=(0,x+y,z,x+1)$

2.- Para las aplicaciones del ejercicio anterior que sean lineales se pide:

a) Matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas.

b) Hallar $Ker(f)$, $Im(f)$ sus ecuaciones y dimensiones, una base del núcleo y una de la imagen.

3.- Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ dos aplicaciones lineales definidas por:

$$f(1,1)=(5,2,3),\quad f(2,3)=(2,0,4)$$

$$g(-2,4,2)=(1,1,1,1)\ g(1,0,-1)=(2,-1,3,4)\ g(-1,2,0)=(0,1,0,1)$$

Hallar: a) Las matrices asociadas a las aplicaciones lineales f y g respecto de las bases canónicas. b) Las ecuaciones de dichas aplicaciones lineales. c) Las ecuaciones de las aplicaciones $f+g$ y $g\circ f$. d) Los núcleos de f y g y sus respectivas ecuaciones e) Lo mismo para las imágenes.

4.- Sean f, g dos automorfismos de un espacio vectorial V de dimensión 2 tales que:

$$f(\vec{u}_1)=\vec{e}_1+\vec{u}_2,\quad f(\vec{u}_2)=\vec{e}_1-\vec{u}_2,\quad f(\vec{e}_1)=2\vec{v}_1-\vec{v}_2,\quad f(\vec{e}_2)=-\vec{v}_1+3\vec{v}_2$$

donde $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$, $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ son bases de V, se pide: a) la matriz y ecuaciones de $g\circ f$. b) El núcleo. c) La imagen. d) El transformado de $\vec{x}=\vec{u}_1-3\vec{u}_2$ por la aplicación compuesta.

5.- Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por $f(x,y,z)=(3x,x+2y,4x+2z)$. Hallar el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de f.

6.- Hallar el polinomio característico, los autovalores y autovectores del endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que en la base canónica tiene asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Analícese si es diagonalizable.

7.- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que en la base canónica tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ (\alpha \in \mathbb{R}) .$$

a) Obtener los autovalores de A comprobando que no dependen de α.

b) Obtener los autovectores de f en función de α y estudiar si f es diagonalizable.